

Abstraktní výpočty

Cvičení 1. Určete, jaký abstraktní objekt tvoří vojenské pokyny přímo hled, vpravo bok, vlevo bok a čelem vzad s operací $\circ$, která symbolizuje následování pokynů za sebou.

Cvičení 2. Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ je definována operace $\star$ předpisem

$$a \star b = a + b + 2ab.$$

- a) Rozhodněte, zda se jedná o komutativní binární operaci.
- b) Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, \star)$ je pologrupa.
- c) Ukažte, že $(\mathbb{Z}, \star)$ má jednotkový prvek.
- d) Najděte všechny invertibilní prvky v $(\mathbb{Z}, \star)$. Tvoří tyto invertibilní prvky spolu s operací $\star$ grupu? Svá tvrzení zdůvodněte.

Cvičení 3. Rozhodněte, zda $\langle N, \star \rangle$ je pologrupa, kde operace $\star$ na množině přirozených čísel N je definována takto: $x \star y = x^y$.

Cvičení 4. Označte jako $t : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ funkci $t(a) = b$, $t(b) = a$. Dále označte $S = \{t, t \circ t\}$. Dokažte, že $\langle S, \circ \rangle$ je grupa.

Cvičení 5. Ať $\langle X, \star, e \rangle$ je monoid. Označte jako X^* množinu invertibilních prvků X a ukažte, že X^* je grupa.

Cvičení 6. (Velebil 6.1.5) Centrum grupy $\langle G, \star, e, (-)^{-1} \rangle$ je množina

$$Z(G) = \{a \in G \mid a \star g = g \star a \text{ pro všechna } g \in G\}.$$

Ukažte, že množina $Z(G)$ je v G uzavřena na všechny operace, a tvoří podgrupu grupy $\langle G, \star, e, (-)^{-1} \rangle$.