Strukturální indukce

Příklady z teorie jazyků

Cvičení 1. Sestavte derivační strom pro zadaná slova w a gramatiku jazyka L.

a) $\sum = \{0,1\},\ G = \{\frac{}{0}(0), \frac{}{1}(1), \frac{S}{S0}(_0), \frac{S}{S1}(_1)\}, w\ = 101,$

b) $\sum = \{a,b\},\ G = \{\frac{}{aa}(1), \frac{w}{wb}(2), \frac{w_1\quad w_2}{w_1 w_2}(3)\},\ w = aabaabb.$

[Řešení:]

Cvičení 2. Mějme zadanou množinu $S = \{a^{n+1}b^n | n \geq 0\}$ nad abecedou $\sum = \{a,b\}$. Zadejte množinu S induktivně. Dokažte.

[Řešení: G: $\frac{}{a}(1), \frac{w}{awb}(2)$]

Cvičení 3. Mějme zadanou množinu L induktivně gramatikou G: $\frac{}{\epsilon}(1), \frac{w}{awb}(2), \frac{w}{bwa}(3), \frac{w_1\quad w_2}{w_1 w_2}(4)$ Zadejte množinu L pomocí vlastnosti. Dokažte.

[Řešení: $S = \{w \in \sum^* | w$ obsahuje stejný počet symbolů a i b $\}$ nad abecedou $\sum = \{a,b\}$]

Induktivně zadané množiny

Cvičení 4. Mějme funkce $f(n)$ definované induktivně. Pro každou z nich dokažte zadanou vlastnost V.

a) $I:\ f(1) = 1,\ f(2) = 2, \quad R:\ f(n+1) = 1/nf(n) + f(n-1)$ pro $n \geq 2$, V: $f(n) \leq n^2$

b) $I:\ f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = 1, \quad R:\ f(n+1) = f(n) + f(n-1) - f(n-2)$ pro $n \geq 3$,

V: Vymyslete.

c) Fibonacci: $I:\ F_1 = F_2 = 1, \quad R:\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pro $n \geq 2$,

V: $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},\ n \geq 1.$

d) Fibonacci: $I:\ F_1 = F_2 = 1, \quad R:\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pro $n \geq 2$,

V: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},\ n \in N.$

[$f(n+1) \leq n^2/n - (n-1)^2 = n^2 - n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; $f(n)$ 0 pro sudá n a 1 pro lichá; $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$, stejně pro násobení n-tou mocninou zprava]

Indukce ve vyšší dimenzi

Cvičení 5. Dokažte, tvrzeni:

a) Počet všech k-členných variací s opakovaním na n prvcích je $V'(k,n) = n^k$.

a) Počet všech k-členných kombinací s opakováním na n prvcích je $C'(k,n) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$.

[$V'(1,1) = 1^1$ platí, $V_n'(1) = n^1 = n$ platí, $V_n'(k+1) = V_n'(k) \cdot n = n^{k+1}$; $\quad C'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ platí, $C_n'(1) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$ platí, $C_n'(k+1) = C_n'(k) + nejakekomb\ cislo = \begin{pmatrix} n-k-2 \\ k+1 \end{pmatrix}$]