

Predikátová logika

syntaxe, sémantika, splnitelnost, klausální tvar, rezoluční metoda

Cvičení 1. Formalizujte následující věty a uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly, které k tomu použijete.

- a) Eva mluví dobře anglicky a francouzsky.
- b) Každý, kdo mluví anglicky, mluví i francouzsky.,
- c) Každý čtverec reálného čísla je záporný.
- d) Každé přirozené číslo má následníka.

$$[A(e) \& F(e); \forall x(A(x) \Rightarrow F(x)); \forall x Z(f(x)); \forall x \exists y N(x, y)]$$

Cvičení 2. Určete, které z následujících řetězců jsou termy a které ne. (s, f jsou funkční symboly arity 1 a 2, a, b konstantní symboly)

- a) $f(a, x)$,
- b) $s(f(a, s(a)))$,
- c) $f(s(a), s(a, b))$,
- d) $f(f(s(x), x), f(b, s(x)))$.

[ano; ano; ne; ano]

V následujících jsou P, Q jsou predikáty arity 1 a 2, s, f funkční symboly arity 1 a 2, a, b konstanty, x, y proměnné.

Cvičení 3. U následujících formulí rozhodněte, zda se jedná o korektní formuli predikátové logiky a pokud ano, nakreslete derivační strom.

- a) $Q(f(a), s(b))$,
- b) $P(f(x, s(x)))$,
- c) $\forall x(Q(f(x, a), b) \Rightarrow P(f(a, b)))$,
- d) $\exists x(P(Q(x, y)) \Rightarrow Q(a, b))$,

[ne; ano; ano; ne]

Cvičení 4. Určete, zda se jedná o uzavřenou formuli (sentenci) či otevřenou.

- a) $\forall x \exists y Q(x, y)$,
- b) $Q(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$,
- c) $Q(a, b)$,
- d) $Q(f(a, b), y) \Rightarrow (\exists y P(s(y)))$.

[uzavřená; otevřená; otevřená i uzavřená; ani otevřená ani uzavřená]

Cvičení 5. Pro následující sentence rozhodněte, zda se jedná o tautologie, kontradikce nebo splnitelné sentence, které nejsou tautologie. Přejmenujte proměnné.

- a) $(\exists x P(x)) \vee (\exists x \neg P(x))$,
- b) $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$,
- c) $(\forall x P(x)) \& (\exists x \neg P(x))$.

[tautologie; splnitelná; kontradikce]

Cvičení 6. Rozhodněte, zda následující množiny sentencí jsou splnitelné nebo nesplnitelné. Zdůvodněte. (R je unární predikátový symbol)

- a) $S = \{\forall x \exists y Q(x, y), \forall x \neg Q(x, x)\}$,
- b) $S = \{\exists x \forall y Q(x, y), \forall x \neg Q(x, x)\}$,
- c) $S = \{\forall x (P(x) \vee R(x)), \neg(\exists x R(x)), \neg P(a)\}$.

[ano; ne; ne]

Cvičení 7. Nalezněte pro následující dvojice literálů nejobecnější substituci, aby byly stejné.

- a) $P(x, y), P(t, f(z))$,
- b) $Q(a, y, f(y)), Q(z, z, u)$,
- c) $R(x, g(x)), R(y, y)$,

[lze, substituce $\{x/t, y/f(z)\}$; lze, substituce $\{z/a, y/a, u/f(a)\}$; nelze]

Cvičení 8. Nalezněte všechny rezolventy následujících klauzulí.

- a) $\{P(x, y), Q(y, z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$,
- b) $\{P(x, x), \neg Q(x, f(x))\}, \{Q(x, y), R(y, z)\}$,
- c) $\{P(x, y), \neg Q(y, x)\}, \{Q(x, x), P(y, f(x))\}$,
- d) $\{P(x, y), \neg S(x, x), T(x, f(x), z)\}, \{\neg T(f(x), x, z), S(x, z)\}$.
 $[\{Q(f(u), z)\}; \{P(x, x), R(f(x), z)\}; \{P(x, x), P(y, f(x))\}; \{P(x, y), T(x, f(x), z), \neg T(f(x), x, x)\}]$

Cvičení 9. Převeďte následující formule na klausální tvar.

- a) $\neg(\forall x[\exists y Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists z \neg P(x, y, z)])$,
- b) $\exists x S(x) \Rightarrow [\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x \exists y T(x, y)]$

□

Cvičení 10. Rezoluční metodou rozhodněte, zda platí.

- a) $\{\forall x \forall y((P(x) \& Q(x, y)) \Rightarrow R(y)), \forall x Q(f(x), g(x)), P(f(a))\} \models R(g(a))$,
- b) $\{\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x, y)), \forall x \forall y(Q(x, y) \Rightarrow P(f(y)))\} \models \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y P(f(y)))$,
- c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
 $\frac{\exists x \neg P(x)}{\exists x Q(x)}$
- d) $S = \{\neg P(x, y) \vee Q(x, y, a), \neg Q(g(v), z, z) \vee R(v, z), \neg R(b, a), P(x, a)\}$ je splnitelná.

[ano; ano; ano; ano]