Součiny vektorů

Skalární

8.42 Cvičení. V lineárním prostoru R (viz příklad 1.12) je definován součin mezi vektory jako běžný součin. Ověřte, že se jedná o skalární součin.

8.47 Cvičení. Ověřte, zda následující součiny vektorů x = $(x_1; x_2; x_3)$, y = $(y_1; y_2; y_3)$ z lineárního prostoru R^3 splňují axiomy skalárního součinu.

a) $x \cdot y = x_1^2 + y_1^2 + x_2y_2 + 3x_3y_3$,

b) $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + 2x_2y_1$,

c) $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$,

d) $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$,

e) $x \cdot y = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$.

8.53 Cvičení. V následujícím příkladě předpokládáme standardní skalární součin na R^4 a z něj odvozenou velikost vektorů a úhel mezi vektory. Najděte

a) velikosti vektorů (1; 2; 2; 1), (2; 1; 1; 0) a úhel mezi těmito vektory,

b) $a \in$ R tak, aby vektory (1; 2; 2; 1), (2; 1; 1; a) byly na sebe kolmé,

c) všechny vektory, které jsou současně kolmé na vektory (1; 2; 2; 1), (2; 1; 1; 0), (2; 1; 0; 1).

8.67 Cvičení. Na R^3 je dán standardní skalární součin. Jsou dány vektory b1 = (1; 2; 2), b2 = (2; 1; 0), b3 = (1; 1; 3). Proveďte ortogonalizaci báze (B) = (b1; b2; b3), tj. najděte ortogonální bázi (C) = (c1; c2; c3) takovou, že <c1> = <b1>, <c1; c2> = <b1; b2>, <c1; c2; c3> = <b1; b2; b3>. Dále proveďte normalizaci získané ortogonální báze. Konečně najděte matici přechodu od uspořádané báze (B) k bázi (C).

Vektorový

9.26 Příklad. Spočítáme $(2u - 5v) \times (u + 3v)$.

$[11(u \times v)]$

9.89 Cvičení. Vektory u a v jsou jednotkové a svírají úhel 60°. Najděte plochu rovnoběžníka, jehož strany jsou vektory a, b, pro které platí a = u − 2v a b = 2u + 3v.

$[7 \cdot \|(u \times v)\| = 7 \cdot sin60° \cdot \|u\| \cdot \|v\| = 7 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 1 = 7/2.]$

9.91 Cvičení. Vypočtěte velikost vektoru (2u − 3v) × (u + 2v), víte-li, že $\|u \times v\| = 5$.

$[7(u \times v) = 35.]$