Lineární prostory

1.76. Cvičení. Nechť **C** je množina komplexních čísel, tj. čísel tvaru $a+ib$, kde $a, b \in \mathrm{R}$ a i je imaginární jednotka ($i^2 = -1$). Uvažujte na této množině běžné sčítání $z = x + y$ (pokud $x = a + ib$, $y = c + id$, pak $z = a + c + i(b + d)$) a násobení reálným číslem: $\alpha(a + ib) = \alpha a + i(\alpha b)$. Dokažte, že množina C s takto definovaným sčítáním a násobením reálným číslem tvoří lineární prostor. [Ano]

1.82. Cvičení. Nechť M je množina uspořádaných trojic reálných čísel takových, že první složka trojice je rovna složce třetí, druhá může být jakákoli. Ukažte, že M je podprostor lineárního prostoru R^3. [Ano]

1.83. Cvičení. Nechť M je množina uspořádaných trojic reálných čísel takových, že první složka trojice je o jedničku větší než složka třetí, druhá složka může být jakákoli. Ukažte, že M není podprostor lineárního prostoru R^3. [Ne]

1.84. Cvičení. Pro následující podmnožiny $\mathrm{M} \in \mathrm{R}^4$ ověřte, zda se jedná o lineární podprostor lineárního prostoru R^4:

a) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = 2x_2; x_3 = 4x_4\}$,

b) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 > x_2; x_3 > x_4\}$,

c) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 \neq x_2; x_3 = x_4\}$,

d) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = 1; x_2 = x_3 = x_4\}$,

e) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = x_2 + x_3 - x_4\}$,

f) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = x_2 + x_3 - x_4; x_2 = x_3 + x_4\}$,

g) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = 0; x_2; x_3; x_4$ libovolné$\}$,

h) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$,

i) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a\}$, $a \in \mathrm{R}$ je zadaná konstanta,

j) $\mathrm{M} = \{(x_1; x_2; x_3; x_4); |x_1| = |x_2|; |x_3| = |x_4|\}$.

[Ano; Ne; Ne; Ne; Ano; Ano; Ano; Ano; Ne]

2.68. Cvičení. Ověřte lineární závislost či nezávislost vektorů:

a) (1; 2; 0), (0;-1; 3), (5; 7;-2) v lineárním prostoru R^3,

b) (1; 3; 0;-1), (0; 2;-1; 4), (1;-5; 7;-2) v lineárním prostoru R^4,

c) $x^2 + 2x - 1, 2x^3 - 3x + 2, -4x^3 + x^2 + 8x - 5$ v lineárním prostoru polynomů,

d) $\sin x, \cos^2 x, x^2 - 1$ v lineárním prostoru funkcí,

e) $2 + i, 2 - i, 3 + 5i$ v lineárním prostoru komplexních čísel C,

f) $(i; 1; 1 + i), (2; 2 + i; 0), (0; 3 - 3i; 7)$ v lineárním prostoru C^3,

g) 2, 5 v lineárním prostoru R,

h) 2, 5 v lineárním prostoru R^+,

i) (2; 1), (1; 0) v lineárním prostoru R^2.

[LN; LN; LZ; LN; LZ; LN; LZ; LZ; LN]

Řešení 1.76. Součet komplexních čísel je komplexní číslo. Reálný násobek komplexního čísla je komplexní číslo. Komplexní číslo $a + ib$ lze zapsat ve tvaru dvojice $(a; b)$, příčemž součet a reálný násobek pak odpovídají operacím (??) a (??). Vlastnosti (1)–(7) je pak možné snadno ověřit.

Řešení 1.82. $(a; b; a) + (c; d; c) = (a + c; b + d; a + c) \in \mathrm{M}$, $\alpha(a; b; a) = (\alpha a; \alpha b; \alpha a) \in \mathrm{M}$.

Řešení 1.83. $(0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$, přitom (0; 0; 0) musí ležet v každém podprostoru lineárního prostoru R^3.

Řešení 1.84.

(a) M je podprostor: $(2x_2; x_2; 4x_4; x_4) + (2y_2; y_2; 4y_4; y_4) = (2(x_2 + y_2), x_2 + y_2, 4(x_4 + y_4), x_4 + y_4) \in \mathrm{M}$, $\alpha(2x_2, x_2, 4x_4, x_4) = (2\alpha x_2, \alpha x_2, 4\alpha x_4, \alpha x_4) \in \mathrm{M}$.

(b) M není podprostor, protože $(0; 0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$.

(c) M není podprostor, protože $(0; 0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$.

(d) M není podprostor, protože $(0; 0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$.

(e) M je podprostor: Označím $u = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3; x_4 + y_4)$ pro $x_1 = x_2 + x_3 - x_4$ a $y_1 = y_2 + y_3 - y_4$.

Mám ověřit, že $u \in \mathrm{M}$. Protože $x_1 + y_1 = x_2 + x_3 - x_4 + y_2 + y_3 - y_4 = (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4)$, je $u \in \mathrm{M}$. Dále označím $v = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ pro $x_1 = x_2 + x_3 - x_4$. Mám ověřit, že $v \in \mathrm{M}$. Protože $\alpha x_1 = \alpha(x_2 + x_3 - x_4) = \alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4$, je $v \in \mathrm{M}$.

(g) M je podprostor: $(0; x_2; x_3; x_4) + (0; y_2; y_3; y_4) = (0; x_2 + y_2; x_3 + y_3; x_4 + y_4) \in \mathrm{M}$, $\alpha(0; x_2; x_3; x_4) = (0; \alpha x_2; \alpha x_3; \alpha x_4) \in \mathrm{M}$.

(h) M je podprostor: $(a; a; a; a) + (b; b; b; b) = (a + b; a + b; a + b; a + b) \in \mathrm{M}$, $\alpha(a; a; a; a) = (\alpha a; \alpha a; \alpha a; \alpha a) \in \mathrm{M}$.

(i) M je podprostor pro $a = 0$: Označím $u = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3; x_4 + y_4)$ pro $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ a $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Je $0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$, takže $u \in \mathrm{M}$. Označím $v = \alpha(x_1; x_2; x_3; x_4) = (\alpha x_1; \alpha x_2; \alpha x_3; \alpha x_4)$ pro $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Je $0 = \alpha \cdot 0 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4$, takže $v \in \mathrm{M}$. M není podprostor pro $a \neq 0$, protože $(0; 0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$.

(j) M není podprostor: $(1; -1; 0; 0) \in \mathrm{M}$, $(1; 1; 0; 0) \in \mathrm{M}$, ale $(1; -1; 0; 0) + (1; 1; 0; 0) = (2; 0; 0; 0) \notin \mathrm{M}$.

Řešení 2.68.