

Soustavy lineárních rovnic - Frobeniova podmínka, Cramerovo pravidlo, maticové soustavy

Cvičení 4.57. Vypočtěte následující determinanty.

$$\begin{aligned} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ [(a-b)(a-c)(c-b)] \end{aligned}$$

Cvičení 5.44. Pomocí Frobeniovy věty ověřte řešitelnost následujících soustav lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x + 3y = 5 \\ & x + 2y = 3 \\ & 2x + 2y = 5 \\ \text{b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & 3x_1 + 5x_2 = 2 \\ & x_1 + 4x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 6x_2 = 2 \\ \text{c)} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 2 \\ \text{d)} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 2 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2 \\ \text{e)} \quad & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ & 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{aligned}$$

□

Cvičení 5.45. Najděte bázi a dimenzi lineárního prostoru všech řešení následujících homogenních soustav lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ & 4x_1 + 10x_2 = 0 \\ \text{b)} \quad & 2x + 3y = 0 \\ & 3x - y = 0 \\ \text{c)} \quad & 9x + 3y - z = 0 \\ & 5x - 2y - 3z = 0 \\ \text{d)} \quad & 2x + y + 3z = 0 \\ & 3x + y + 2z = 0 \\ & 2x + 3y + z = 0 \\ \text{e)} \quad & 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ & 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \\ \text{f)} \quad & 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ \text{g)} \quad & 3u + 2v + w - x = 0 \\ & u + 2v + 3w - x = 0 \\ & 2u + 3v + w + x = 0 \\ & u + 2v + 3w - x = 0 \\ \text{h)} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ & 4x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ & 3x_1 + 15x_2 - 22x_3 + 21x_4 = 0 \\ & 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ \text{i)} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 9x_6 + 8x_7 = 0 \end{aligned}$$

□

Cvičení 5.47. Najděte množinu všech řešení soustav ze cvičení 5.44.

Cvičení 5.51. Za použití Cramerova pravidla najděte hodnotu proměnné x_2 , která vyhovuje řešení dané soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \text{b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 = 6 \\ \text{c)} \quad & 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ & 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 16 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{d) } 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 & \text{e) } x_1 + x_2 - x_3 = 2 & \text{f) } x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 & x_1 - x_2 + x_3 = 2 & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
16x_1 + 15x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 1 & x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 & x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\
5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 & &
\end{array}$$

□

Cvičení 5.52. Rozhodněte v závislosti na parametru $p \in R$, jak vypadají množiny řešení následujících soustav.

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } px + y = p & \text{b) } 2x_1 - px_2 - x_3 = 3 & \text{c) } x + y + pz = p & \text{d) } px + y + z = 1 \\
x + py = 1 & x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0 & x + py + z = 1 & x + py + z = -1 \\
& -x_1 + 3x_2 + px_3 = -1 & px + y + z = 1 & x + y + pz = (p-1)^2 \\
\text{e) } x_1 + px_2 - x_3 + x_4 = -3 & \text{f) } x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 & \text{g) } x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 1 & \\
-7x_1 + px_2 + 3x_3 + x_4 = -3 & 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 16 & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + px - 4 = 1 & \\
-2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 & x_1 + px_2 - 8x_3 = 4 & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x - 4 = 2 & \\
3x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 & x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4 & & \\
\text{h) } x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{i) } px_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \text{j) } (p+1)x_1 + x_2 + x_3 = p(p+3) & \\
x_1 + px_2 + x_3 = p & x_1 + px_2 + x_3 + x_4 = 1 & x_1 + (p+1)x_2 + x_3 = p^2(p+3) & \\
x_1 + x_2 + px_3 = p & x_1 + x_2 + px_3 + x_4 = 1 & x_1 + x_2 + (p+1)x_3 = p^3(p+3) & \\
& x_1 + x_2 + x_3 + px_4 = 1 & &
\end{array}$$

□

Cvičení 5.66. Najděte všechny matice X , které splňují následující rovnice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

□