Matice inverzní a determinanty

Cvičení 3.85. Najděte bázi a dimenzi lineárního prostoru všech matic komutujících s maticí A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[dim je 2, {E;A};

dim je 5, $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\}$;

dim je 4, $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$]

Domácí cvičení 3.87. Najděte všechny matice A typu (2,2) takové, že

a)$A^2 = O$, kde O je nulová matice typu (2,2),

b)$A^2 = E$, kde E je jednotková matice typu (2,2),

c)$A^2 = A$.

Cvičení 3.99. Součet prvků matice A na hlavní diagonále $a_{1,1} + a_{2,2} + ... + a_{n,n}$ se nazývá stopa matice. Dokažte, že pokud jsou oba součiny AB i BA definovány, pak mají stejnou stopu.

Cvičení 4.42. Rozhodněte, zda následující permutace je sudá nebo lichá

a)(1 ,3 ,4 ,6 ,2 ,5),

b)(2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,1),

c)(6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1),

d)$(2, 4, 6, ..., 2n, 1, 3, 5, ..., 2n - 1)$.

Cvičení 4.44. Zapište permutaci, která je výsledkem skládání následujících permutací:

a)(1 ,3 ,4 ,6 ,2 ,5) $\circ$ (1 ,3 ,4 ,6 ,2 ,5),

b)(1 ,3 ,4 ,6 ,2 ,5) $\circ$ (2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,1),

c)(2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,1) $\circ$ (1 ,3 ,4 ,6 ,2 ,5).

[(1 ,4 ,6 ,5 ,3 ,2);]

Cvičení 4.45. Najděte inverzní permutace k permutacím ze cvičení 4.42.

Cvičení 4.57. Vypočtěte následující determinanty.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

$[(a - b)(a - c)(c - b)]$