Úvod do denotační sémantiky a teorie kategorií

Jan Starý

19. dubna 2019 15:04
(pracovní verze)

Obsah

1 Uspořádání a svazy **5**
- 1.1 Uspořádané množiny 5
- 1.2 Úplné svazy 7
- 1.3 Monotónní zobrazení 11

2 Topologie **13**
- 2.1 Topologické prostory 13
- 2.2 Báze a subbáze 16
- 2.3 Konvergence 17
- 2.4 Spojitost 19
- 2.5 Oddělovací vlastnosti 20
- 2.6 Kompaktnost 22
- 2.7 Podprostory 23
- 2.8 Sumy 23
- 2.9 Produkty 24

3 Denotační sémantika **26**
- 3.1 Datové typy 26
  - 3.1.1 Injektivní prostory 26
  - 3.1.2 Scott topology 27
  - 3.1.3 Spojité svazy 28
- 3.2 Procedury 29
- 3.3 Složené typy 32
  - 3.3.1 Produkty 32
  - 3.3.2 Sumy 33
  - 3.3.3 Typy funkcí 33
  - 3.3.4 Inverzní limity 34

4 Teorie kategorií **35**
- 4.1 Univerzalita produktu 35
- 4.2 Objekty a morfismy 36
- 4.3 Vlastnosti morfismů 37
- 4.4 Limity a kolimity 38
- 4.5 Kartézsky uzavřené kategorie 38
- 4.6 Funktory 38
- 4.7 Přirozené ekvivalence 38

`verze: 19. dubna 2019`

Toto je *stále ještě rostoucí* studijní text k přednášce *Matematické struktury v informatice*, konané na FIT ČVUT v Praze v letech 2014–2019. Připomínky prosím zasílejte na `jan.stary@fit.cvut.cz`.

Úvod

Zdrojový kód programu je text ve formálním jazyce. Tak jako ostatní jazyky, ať už přirozené či umělé, mají programovací jazyky svou *syntax* a svou *sémantiku*.

Syntax stanovuje gramatická pravidla: které řetězce považujeme vůbec za slova a věty (jména proměnných, příkazy, ...), a jakými způsoby můžeme z jednoduchých výrazů skládat složitější, tak jako v přirozeném jazyce skládáme slova do vět a věty do souvětí. Sémantika pak přiřazuje výrazům jazyka *význam*, resp. ptá se, co tyto výrazy „znamenají“. Co „znamená“ zdrojový kód programu?

Jedna odpověď se nabízí: významem zdrojového kódu je sada instrukcí, která vzejde z kompilace; tyto instrukce bude vykonávat nějaký předem známý procesor, na kterém každá z těchto instrukcí znamená jistou předem známou operaci. Tato přirozená úvaha je základem *operační sémantiky* programovacích jazyků.

Stejně přirozená je však i následující námitka: takto pojatý „význam“ kódu je závislý na překladači, procesoru, a konkrétní representaci dat v paměti. Existují přitom programy běžící na různých procesorech s různými instrukčními sadami, napsané v různých programovacích jazycích, které v nějakém dobrém smyslu „dělají totéž“ — přestože na nejnižší úrovni se jedná o jiné operace nad jinou representací dat. Je přirozené požadovat, aby „význam“ takových programů byl tentýž. Takový požadavek znamená, že „význam“ programu by neměl být závislý na překladači, architektuře a implementačních detailech. Snahou o zachycení takového „významu“ je *denotační sémantika* programovacích jazyků.

Jako příklad rozdílu mezi těmito dvěma přístupy uvažme sčítání přirozených čísel. Zachytit tuto proceduru ve smyslu operační sémantiky znamená zvolit nějakou representaci přirozených čísel v paměti počítače (typicky nějaký *bit pattern*, řekněme na 32 bitové architektuře) a popsat, které instrukce (řekněme ze sady `i386`) nad touto representací se provedou například při vyhodnocování výrazu `x + y`. Naopak při zkoumání $+$ jakožto *matematického objektu* (totiž zobrazení z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$) jsou tyto otázky zcela irelevantní. Co přesně a jak se „děje uvnitř“ operace $+$ s objekty 3 a 2, že výsledkem je 5? Taková otázka nemá žádný dobrý smysl; to co činí operaci $+$ právě touto operací a ne nějakou jinou je to, na jakých vstupech dává jaké výstupy, nezávisle na detailech toho, jak přesně se to děje. Lapidárně řečeno, významem programu je to, jaké výstupy dává na jakých vstupech, nikoli co přesně při tom „dělá“.

Denotační sémantika je způsob, jak abstrahovat od implementačních detailů, které jsou nutně arbitrární — proč jsou přirozená čísla representována zrovna takto, a ne jinak? Ostatně, na jiné architektuře třeba *jsou* representována jinak, a sčítání má tedy jiný *operační* význam, přestože se jedná o tutéž funkci.

Operační a denotační sémantika nejsou jediné dva možné přístupy. Sémantika programovacích jazyků je živý obor na pomezí informatiky a matematické logiky.

V tomto textu popíšeme základy denotační sémantiky. K tomu potřebujeme zavést aparát *uspořádaných množin* a *topologických prostorů*. To učiníme v prvních dvou kapitolách. Čtenář, který se v těchto oblastech orientuje, může první dvě kapitoly přeskočit. Třetí kapitola je věnována samotné denotační sémantice. Text vychází z původních článků D. Scotta [S1, S2, S3] z počátku sedmdesátých let. Závěrečná čtvrtá kapitola je pak úvodem do *teorie kategorií*, která je v oblasti sémantiky jazyků zavedeným vyjadřovacím prostředkem, a která poskytuje denotační sémantice další možná zobecnění.

V textu předpokládáme zběhlost v základních množinových konstrukcích. Na konci textu uvádíme anotovaný seznam literatury pro hlubší studium.

Kapitola 1

Uspořádání a svazy

1.1 Uspořádané množiny

1.1.1 Definice. Binární relace R na neprázdné množině X je

(i) *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ je xRx;

(ii) *antireflexivní*, pokud pro žádné $x \in X$ není xRx;

(iii) *symetrická*, pokud pro každé xRy je také yRx;

(iv) *slabě antisymetrická*, pokud xRy a yRx platí jen pro $x = y$;

(v) *antisymetrická*, pokud pro xRy není yRx;

(vi) *transitivní*, pokud pro každé xRy a yRz je také xRz.

1.1.2 Definice. Binární relace $<$ na neprázdné množině X je *uspořádání*, pokud je antireflexivní a transitivní. Říkáme též, že $(X, <)$ je *uspořádaná množina*.

Prvky $x, y \in X$ jsou *porovnatelné*, pokud je $x < y$ nebo $x = y$ nebo $x > y$; uspořádání, ve kterém každé dva prvky jsou porovnatelné, je *lineární*.

Je zvykem značit uspořádání jako $<$, $\prec$, $\sqsubset$, či jiným sugestivním symbolem. Uspořádání, které není lineární, se někdy obšírněji nazývá *částečné uspořádání*.[1]

1.1.3 Příklad. (a) Nejjednodušším uspořádáním je *diskrétní uspořádání* prázdnou relací. V tomto uspořádání nejsou žádné dva prvky porovnatelné.

(b) Číselné obory $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve svých obvyklých uspořádáních jsou lineární.

(c) Relace dělitelnosti je nelineárním uspořádáním množiny přirozených čísel.

(d) Potenční množina $P(A)$ množiny A je uspořádána inkluzí. Má-li množina A alespoň dva prvky, pak uspořádání $(P(A), \subset)$ není lineární.

(e) Je-li $(A, <)$ nějaká konečná lineárně uspořádaná množina (*abeceda*), buď A^* množina všech konečných posloupností prvků z A (všech *slov* v abecedě A). Lineární uspořádání abecedy se pak rozšiřuje na *lexikografické uspořádání* slov stejným způsobem, jako uspořádání slov ve slovníku: pro slova $u = a_1a_2a_3 \dots a_k$ a $v = b_1b_2b_3 \dots b_l$ je $u \prec v$ právě tehdy, když buďto $k < l$ a pro $j \le k$ je $a_j = b_j$, nebo existuje $i \le \min\{k, l\}$ tak, že pro $j < i$ je $a_j = b_j$ a $a_i < b_i$.

[1] Též *partially ordered set* neboli *poset*.

(f) Buďte $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ dva různé rozklady nějaké dané množiny A. Řekneme, že $\mathcal{P}$ *zjemňuje* $\mathcal{Q}$, a píšeme $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, pokud $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$ a pro každou množinu $P \in \mathcal{P}$ existuje právě jedna množina $Q \in \mathcal{Q}$ tak, že $P \subseteq Q$. Snadno se ověří, že $\prec$ je uspořádáním na množině rozkladů.

Uspořádání je z definice antireflexivní a transitivní. Snadno se nahlédne, že je zároveň antisymetrické: kdyby totiž pro nějaké $x, y \in X$ bylo zároveň $x < y$ a $y < x$, pak z transitivity je také $x < x$, což je ve sporu s antireflexivitou.

Uspořádání tak jak je definováno výše se někdy obšírněji nazývá *ostré uspořádání*. Každému ostrému uspořádání $<$ odpovídá právě jedno *neostré* uspořádání $\leq$ na téže množině, položíme-li $x \leq y$ právě když $x < y$ nebo $x = y$. Takové neostré uspořádání je potom reflexivní, transitivní, a slabě antisymetrické.

Naopak každému takovému neostrému uspořádání $\leq$ odpovídá právě jedno ostré uspořádání, položíme-li $x < y$ právě když $x \leq y$ a $x \neq y$. V dalším budeme volně přecházet mezi ostrým a odpovídajícím neostrým uspořádáním, podle toho, která formulace bude momentálně výhodnější.

1.1.4 Cvičení. (a) Je relace dělitelnosti na množině $\mathbb{Z}$ celých čísel reflexivní, transitivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická? (b) Pro $x, y \in \mathbb{R}$ položme xRy právě když $x < 1$ nebo $y > -1$. Je relace R reflexivní, transitivní, symetrická, slabě antisymetrická, antisymetrická?

1.1.5 Cvičení. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ položme $x \preceq y$ právě když $x : (x^2+1) \leq y : (y^2+1)$. Pak relace $\preceq$ je reflexivní, transitivní, ale nikoli slabě antisymetrická, není tedy uspořádáním na $\mathbb{R}$. Na množině $(-\infty, -1)$ však relace $\preceq$ je slabě antisymetrická, je tedy uspořádáním, a splývá s obvyklým $x \leq y$. Je relace $\preceq$ uspořádáním na množinách $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$?

1.1.6 Cvičení. (a) Popište všechny binární relace na dvouprvkové množině $\{0, 1\}$. Které z nich jsou reflexivní, transitivní, symetrické, slabě antisymetrické, symetrické? Které z nich jsou uspořádáními? (b) Popište nějakou symetrickou, transitivní, ireflexivní relaci na množině nejmenší možné mohutnosti.

1.1.7 Cvičení. Reflexivní, symetrická, transitivní relace se nazývá *ekvivalence*. Popište všechny ekvivalence na tříprvkové a na čtyřprvkové množině. Ekvivalence na množině odpovídají jejím rozkladům a jsou uspořádány inkluzí.

1.1.8 Definice. Buď $(X, <)$ uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ je

(i) *nejmenší*, pokud pro každé $x \in X$ je $a \leq x$.

(ii) *největší*, pokud pro každé $x \in X$ je $a \geq x$.

(iii) *minimální*, pokud pro žádné $x \in X$ není $x < a$.

(iv) *maximální*, pokud pro žádné $x \in X$ není $x > a$.

1.1.9 Cvičení. (a) Popište nejmenší, největší, minimální a maximální prvky předchozích uspořádání. (b) Prvek je největší právě tehdy, když je jediným maximálním prvkem. Tedy uspořádání s více než jedním maximálním prvkem neobsahuje žádný největší. (c) Každé dva maximální prvky jsou navzájem neporovnatelné. Tedy uspořádání s více než jedním maximálním prvkem není lineární.

V uspořádání s nejmenším prvkem a se minimálními prvky většinou myslí minimální prvky množiny $X \setminus \{a\}$. Například přirozené číslo 1 je nejmenším, a tedy jediným minimálním prvkem v uspořádání $\mathbb{N}$ podle dělitelnosti; při uvedené úmluvě se ovšem „minimálními“ prvky rozumí právě všechna prvočísla. Podobně atomy Booleovy algebry $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ jsou právě minimální prvky $(\mathbb{B}\setminus\{0\}, \leq)$.

1.1.10 Cvičení. Všechna uspořádání dané množiny X tvoří systém uspořádaný inkluzí. Nejmenším prvkem tohoto systému je diskrétní uspořádání, a maximálními prvky jsou právě lineární uspořádání.

1.1.11 Definice. Pokud pro každé dva prvky $x, y \in (X, \leq)$ existuje $z \in X$ takové, že $x \leq z$ a $y \leq z$, je uspořádání $(X, \leq)$ *usměrněné* neboli *direktní*.

Snadno se nahlédne, že je-li množina $(X, \leq)$ usměrněná, pak nejen každé dva prvky, ale i každých konečně mnoho prvků má společnou majorantu. Usměrněné uspořádání se někdy obšírněji nazývá *nahoru usměrněné*; analogicky se zavede pojem *dolů usměrněného* uspořádání.

1.1.12 Příklad. (a) Každé lineární uspořádání je usměrněné. (b) Systém všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$ je usměrněn inkluzí. (c) Množina přirozených čísel je usměrněna relací dělitelnosti. (d) Systém všech otevřených intervalů $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ obsahujících nulu je dolů usměrněn inkluzí.

1.1.13 Definice. Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina, buď $M \subseteq X$ její podmnožina. Řekneme, že prvek $x \in X$ je *horní (dolní) mez* neboli *majoranta* (*minoranta*) množiny M, pokud pro každé $m \in M$ je $m \leq x$ (resp. $m \geq x$). Pokud je $x \in X$ nejmenší (resp. největší) ze všech horních (resp. dolních) mezí množiny M, řekneme, že x je *supremum* (resp. *infimum*) množiny M.

Jinými slovy, supremum množiny $M \subseteq X$ je takový prvek $x \in (X, \leq)$, který majorizuje každé $m \in M$, a zároveň je nejmenší s touto vlastností: pokud nějaké $y \in X$ splňuje $m \leq y$ pro každé $m \in M$, pak $x \leq y$. Podobně pro infima. Snadno se nahlédne, že každá množina $M \subseteq X$ může mít nanejvýš jedno supremum.

Napíšeme-li v dalším $x = \sup_{(X,\leq)} M$, nebo stručněji $x = \sup M$, nebude-li pochyb, ve kterém uspořádání se pohybujeme, máme tím na mysli, že podmnožina $M \subseteq X$ má supremum v $(X, \leq)$, a tímto supremem je právě prvek $x \in X$.

1.1.14 Příklad. Množina $\{r \in \mathbb{R}; r * r < 2\} \subseteq \mathbb{R}$ má v uspořádání $(\mathbb{R}, <)$ supremum $\sqrt{2}$. Množina $\{q \in \mathbb{Q}; q * q < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ nemá supremum v uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$.

1.1.15 Příklad. Podle známé věty o úplnosti reálné přímky má každá shora omezená podmnožina v $(\mathbb{R}, \leq)$ supremum. Každá podmnožina $(P(A), \subseteq)$ má supremum a infimum, totiž své sjednocení a průnik. V uspořádání *kladných* přirozených čísel relací dělitelnosti mají supremum jen konečné podmnožiny: supremem $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq \mathbb{N}$ je právě nejmenší společný násobek čísel $m_1, \ldots, m_k$, podobně infimem je největší společný dělitel; podmnožina sestávající ze všech prvočísel ani žádná jiná nekonečná množina však supremum nemá. V uspořádání rozkladů relací zjemnění má každá dvouprkvová množina $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ infimum, totiž společné zjemnění $\{P \cap Q; P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\} \setminus \{\emptyset\}$.

1.2 Úplné svazy

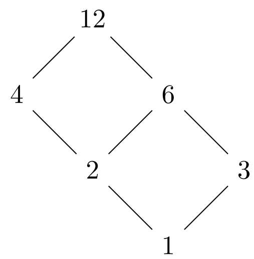
1.2.1 Definice. Uspořádaná množina $(X, <)$ je *svaz*, pokud každá dvouprvková množina $\{x, y\} \subseteq X$ más supremum a infimum. Pokud dokonce každá množina

$M \subseteq X$ má supremum a infimum, jedná se o *úplný svaz*.

Každý svaz je nahoru i dolů usměrněné uspořádání. Indukcí se snadno ukáže, že ve svazu existují suprema a infima nejen dvouprvkových, ale všech konečných podmnožin. Každý konečný svaz je tedy úplný.

V úplném svazu $(X, <)$ má supremum (infimum) každá podmnožina, tedy i prázdná. Přitom horní (dolní) mezí prázdné podmnožiny je jakýkoli prvek $x \in X$, tedy supremum (infimum) prázdné množiny je nutně nejmenším (největším) prvkem svazu $(X, <)$. Úplný svaz tedy musí mít nejmenší a největší prvek, značený obvykle 0 a 1, případně $\perp$ (*bottom*) a $\top$ (*top*).

1.2.2 Příklad. (a) Je-li $x \leq y$, pak $\inf\{x, y\} = x$ a $\sup\{x, y\} = y$. Tedy každé lineární uspořádání je svaz. Například $[0, 1]$ je úplný a $(0, 1)$ neúplný svaz. Podobně $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$ jsou neúplné svazy, jelikož nemají největší prvek. Ve svazu $(\mathbb{R}, <)$ má každá shora omezená množina supremum, zatímco v $(\mathbb{Q}, <)$ nikoli. (b) Uspořádání dělitelů čísla 12 relací dělitelnosti je konečný svaz. (c) Uspořádání kladných přirozených čísel relací dělitelnosti je neúplný svaz. (d) Uspořádání potenční množiny inkluzí je úplný svaz. (d) Konečné množiny $A \subseteq \mathbb{N}$ a jejich doplňky tvoří neúplný svaz uspořádaný inkluzí.



1.2.3 Cvičení. Popište explicitně všechny svazové struktury na dvouprvkové, tříprvkové, čtyřprvkové, pětiprvkové, šestiprvkové množině.

1.2.4 Cvičení. Pro dvě kladná racionální čísla x, y položme $x \preceq y$ právě když existuje *celé* číslo z tak, že $x \cdot z = y$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$ je svaz. Nakreslete jeho podsvaz $\{2^m \cdot 3^n; m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.5 Cvičení. Množina všech kruhů v rovině je uspořádána inkluzí, ale netvoří svaz. Kromě případů, kdy pro dva kruhy K_1, K_2 je $K_1 \subseteq K_2$ nebo $K_2 \subseteq K_1$, dokonce žádná dvouprvková množina $\{K_1, K_2\}$ nemá supremum. Ukažte, že ani přirozený kandidát, totiž společný opsaný kruh, není takovým supremem.

1.2.6 Věta. *Uspořádání $(X, <)$ je úplným svazem právě tehdy, když má největší prvek a každá podmnožina má infimum.*

Důkaz. Implikace zleva doprava platí z definice. V opačném směru máme ukázat, že každá $M \subseteq X$ má supremum. Buď $H \subseteq X$ množina všech horních mezí pro M; ta je neprázdná, neboť alespoň největší prvek padne do H. Podle předpokladu má H infimum, označme je x. Ukážeme, že $x = \sup M$. Předně, každé $m \in M$ je dolní mezí pro H, a tedy z definice infima je $m \leq x$ pro každé $m \in M$; tedy x je horní mez pro M. Zároveň je-li nějaké $y \in X$ horní mezí pro M, je $y \in H$, takže $x \leq y$. Tedy $x = \sup M$. □

Analogicky lze ukázat, že svaz $(X, <)$ je úplný právě tehdy, když má nejmenší prvek a každá podmnožina má supremum.

1.2.7 Příklad. Systém $E(X)$ všech ekvivalencí na dané množině X tvoří úplný svaz uspořádaný inkluzí. To ověříme podle předchozí věty. Největším prvkem $E(X)$ je zřejmě ekvivalence $X \times X$, ve které jsou ekvivalentní jakékoli dva prvky. Zároveň každá $M \subseteq E(X)$ má infimum: pro $x, y \in X$ položme $x \equiv y$ právě tehdy, když xRy pro každou ekvivalenci $R \in M$. Snadno se nahlédne, že $\equiv$ je opět ekvivalence na X, a že je infimem množiny M ve svazu ekvivalencí.

O množině $M \subseteq E(X)$ a jejím supremu $S = \sup M \in E(X)$ říkáme, že M *generuje* ekvivalenci S. Sjednocení ekvivalencí obecně není ekvivalence; podmnožina $M \subseteq E(X)$ generuje nejmenší ekvivalenci obsahující všechny $R \in M$, totiž právě průnik všech takových. $E(X)$ je příklad úplného svazu, který je uspořádán inkluzí, ale suprema nejsou sjednocení.

1.2.8 Cvičení. Ověřte podrobně, že průnik každého systému ekvivalencí je opět ekvivalence, a popište explicitně suprema a infima ve svazech z příkladu 1.2.7.

1.2.9 Cvičení. Množina $K \subseteq \mathbb{R}^2$ je *konvexní*, pokud spolu s každými dvěma svými body obsahuje i celou úsečku, která tyto body spojuje. Ukažte, že systém $K(\mathbb{R}^2)$ všech konvexních množin v rovině je úplný svaz uspořádaný inkluzí.

1.2.10 Příklad. Množina všech přirozených čísel (včetně nuly) je při uspořádání relací dělitelnosti úplným svazem. Každé přirozené číslo je z definice dělitelem nuly (pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $0 * n = 0$), takže 0 je největším prvkem. Zároveň každá množina $M \subseteq \mathbb{N}$ má infimum, totiž největšího společného dělitele.

1.2.11 Cvičení. Uvažte uspořádání inkluzí na systému všech (a) relací (b) reflexivních relací (c) ireflexivních relací (d) transitivních relací (e) symetrických relací (f) slabě antisymetrických relací (g) antisymetrických relací (h) uspořádání na dané množině X a rozhodněte, zda tvoří úplný svaz.

Označíme-li ve svazu $(X, <)$ infimum množiny $\{x, y\}$ jako $x \wedge y$ a supremum jako $x \vee y$, jsou tím na množině X zavedeny dvě binární operace, nazývané obvykle *průsek* a *spojení*. Tím vstupuje do hry *algebraická* struktura $(X, \wedge, \vee)$, tj. množina opatřená operacemi.

1.2.12 Příklad. Uvažme relaci inkluze na množině, jejímiž prvky jsou prostor $\mathbb{R}^3$, prázdná množina, a všechny body, přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$, na které hledíme jako na množiny bodů. Toto uspořádání je úplným svazem: největším prvkem je zřejmě $\mathbb{R}^3$, a snadno se ověří, že každý podsystém má infimum: průnikem rovin je buďto rovina, nebo přímka, nebo je prázdný; podobně pro další.

Tento příklad svým geometrickým obsahem motivuje zavedené názvosloví: přímka je *spojením* bodů a *průsekem* rovin, bod je *průsekem* přímek, atd.

1.2.13 Lemma. *Pro každé tři prvky x, y, z libovolného svazu $(X, \leq)$ platí*

(i) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$

(ii) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$

(iii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(iv) $x \wedge y \leq x$, $x \leq x \vee y$

(v) $x \wedge y = x$ *právě když* $x \vee y = y$ *právě když* $x \leq y$

(vi) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x = x \vee (x \wedge y)$

Podle (i), (ii), (iii) a (vi) jsou svazové operace *idempotentní*, *komutativní*, *asociativní* a splňují zákony *absorpce*. Pro konečnou $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq (X, \leq)$ můžeme ve svazu psát prostě $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ a $x_1 \vee \ldots \vee x_n$. V úplném svazu budeme pro podmnožinu $M \subseteq X$ značit infimum jako $\bigwedge M$ a supremum jako $\bigvee M$.

1.2.14 Lemma. *Buď $(X, \wedge, \vee)$ množina opatřená dvěma komutativními, asociativními operacemi, které splňují zákony absorpce. Pro $x, y \in X$ položme $x \leq y$ právě když $x \wedge y = x$. Potom $(X, \leq)$ je svazové uspořádání, ve kterém pro každé $x, y \in X$ platí* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *a* $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Každý svaz můžeme ekvivalentně nahlížet buďto jako jistý druh uspořádání, nebo jako algebraickou strukturu. V dalším budeme mezi oběma volně přecházet, resp. budeme svaz $(X, \wedge, \vee, \leq)$, případně úplný svaz $(X, \wedge, \vee, \leq, 0, 1)$ nahlížet jako množinu opatřenou jak operacemi, tak odpovídajícím uspořádáním.

Struktura svazu navíc vykazuje jistou *dualitu*. Pokud v axiomech vzájemně zaměníme všechny výskyty $\wedge$ a $\vee$, získáme tutéž sadu axiomů.

1.2.15 Cvičení. (a) Ukažte, že idempotence operací plyne ze zákonů absorpce. (b) Uspořádání $(X, \leq)$ je lineární právě když $\{x \wedge y, x \vee y\} \subseteq \{x, y\}$.

1.2.16 Cvičení. Pro každé tři prvky x, y, z svazu $(X, \wedge, \vee, \leq)$ platí
(i) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; (ii) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

1.2.17 Lemma. *Pro svaz $(X, \wedge, \vee, \leq)$ jsou následující vlastnosti ekvivalentní:*

(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Důkaz. Dokážeme jen (i) $\rightarrow$ (ii), opačný směr se dokáže obdobně. Podle (i) je $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]$, a díky komutativitě a absorpci máme $x \vee [(x \vee y) \wedge z]$. Opět podle (i) máme $x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$, z asociativity tedy $[x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$, a díky absorpci máme konečně $x \vee (y \wedge z)$. □

1.2.18 Definice. Svaz $(X, \wedge, \vee, \leq)$ je *distributivní*, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, nebo ekvivalentně $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Například $(P(A), \cap, \cup, \subseteq)$ a každé lineární uspořádání je distributivní.

1.2.19 Příklad. Svaz dělitelnosti je distributivní. Z obou duálních axiomů distributivity dokážeme jen $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Víme, že suprema v $(\mathbb{N}, |)$ jsou nejmenší společné násobky a infima jsou největší společní dělitelé. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že žádné ze zúčastněných čísel není rovno nule, která je největší prvkem v $(\mathbb{N}, |)$, jinak rovnost platí triviálně.

Každé z čísel x, y, z má svůj jednoznačný prvočíselný rozklad. Buď tedy[2] $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $y = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$, $z = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$. Potom největším společným dělitelem $x \wedge y$ čísel x, y je $p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$, kde $d_i = \min(a_i, b_i)$, a nejmenším společným násobkem $y \vee z$ čísel y, z je $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, kde $e_i = \max(b_i, c_i)$. Máme tedy vlevo číslo $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$, kde $l_i = \min(a_i, \max(b_i, c_i))$, a vpravo číslo $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$, kde $r_i = \max(\min(a_i, b_i), \min(a_i, c_i))$. Přitom exponenty a_i, b_i, c_i jsou prvky lineárně uspořádaného distributivního svazu $(\mathbb{N}, \leq)$, a tedy $l_i = r_i$.

1.2.20 Cvičení. Je svaz konvexních množin v rovině distributivní?

[2] Připouštíme i nulové exponenty a_i, b_i, c_i, proto můžeme psát tatáž prvočísla $p_1, \ldots, p_k$.

1.2.21 Cvičení. Popište nejmenší možný nedistributivní svaz.

1.2.22 Definice. Podmnožina Y svazu $(X, \wedge, \vee)$ tvoří *podsvaz*, je-li uzavřená na svazové operace, tj. pokud pro každé $x, y \in Y$ je také $x \wedge y \in Y$ a $x \vee y \in Y$. Jinými slovy, $Y \subseteq (X, \wedge, \vee)$ je podsvaz, pokud $(Y, \wedge, \vee)$ je svaz.

1.2.23 Příklad. Konečné podmnožiny $\mathbb{N}$ uspořádané inkluzí tvoří neúplný podsvaz úplného svazu $P(\mathbb{N})$. Stejně tak systém konečných podmnožin $\mathbb{N}$ a jejich doplňků. Množina lichých přirozených čísel je podsvazem svazu dělitelnosti.

1.2.24 Cvičení. Které podsvazy má svaz ekvivalencí na čtyřprvkové množině?

1.2.25 Cvičení. Je-li $(X, \leq)$ úplný svaz, je pro každé $a, b \in X$ splňující $a < b$ množina $[a, b] = \{x \in X; a \leq x \leq b\}$ úplným svazem.

1.2.26 Cvičení. (a) Průnik každého systému podsvazů je podsvaz. (b) Systém všech podsvazů daného svazu sám tvoří úplný svaz, uspořádaný inkluzí.

1.2.27 Definice. Buďte $(X_i, <_i), i \in I$ uspořádané množiny. Pak pro prvky $x = (x_i), y = (y_i)$ součinu $\prod_{i \in I} X_i$ definujeme $x < y$ právě když $x_i <_i y_i$ pro každé $i \in I$. Tuto relaci $x < y$ nazýváme *součinovým uspořádáním*.

Můžeme stručně říci, že součinové uspořádání je definováno „po složkách“. Snadno se ověří, že je vskutku uspořádáním na $\prod_{i \in I} X_i$. Součin svazů je svaz a součin úplných svazů je úplný svaz. Součin usměrněných uspořádání je opět usměrněný, ale součin lineárních uspořádání nemusí být lineární. Například množina $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel s uspořádáním po složkách je součin lineárních uspořádání $(\mathbb{R}, <)$; není lineární, ale je svazem.

1.2.28 Cvičení. (a) Součin uspořádání $(X_i, <_i)$ je usměrněný právě tehdy, když každé $(X_i, <_i)$ je usměrněné. (b) Součin svazů $(X_i, <_i)$ je úplný právě tehdy, když každý svaz $(X_i, <_i)$ je úplný. (c) Součin lineárních uspořádání $(X_i, <_i)$ je lineární právě tehdy, když všechna $(X_i, <_i)$ kromě jednoho jsou *jednoprvková*.

1.3 Monotónní zobrazení

1.3.1 Definice. Zobrazení $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ mezi dvěma uspořádáními je *monotónní*, pokud pro $a \leq b \in X$ je $f(a) \preceq f(b) \in Y$, respektive *antimonotónní*, pokud pro $a \leq b$ je $f(b) \preceq f(a)$.

1.3.2 Věta (Tarski)**.** *Buď $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ monotónní zobrazení úplného svazu do sebe. Potom množina $\{x \in X; f(x) = x\}$ tvoří úplný svaz, jehož nejmenším prvkem je $\{x \in X; f(x) \leq x\}$ a největším prvkem $\{x \in X; f(x) \geq x\}$.*

Důkaz. Označme $D = \{x \in X; f(x) \leq x\}$. Množina $D \subseteq X$ má infimum, neboť X je úplný svaz. Buď tedy $x_0 = \inf D$. Ukážeme nejprve, že x_0 je pevný bod. Pro každé $x \in D$ je $x_0 \leq x$, takže $f(x_0) \leq f(x) \leq x$, neboť f je monotónní. Tedy $f(x_0)$ je dolní mezí D. Přitom $x_0 = \inf D$, takže $f(x_0) \leq x_0$, neboli $x_0 \in D$. Tedy x_0 je nejen infimem, ale dokonce nejmenším prvkem množiny D. Zbývá ukázat, že je také $x_0 \leq f(x_0)$. Z monotonie máme $f(f(x_0)) \leq f(x_0)$, takže $f(x_0) \in D$. Přitom $x_0 = \min D$, takže je $x_0 \leq f(x_0)$. Tedy $x_0 = f(x_0)$. Množina pevných bodů je částí D, takže $x_0 = \min D$ je nejmenší pevný bod. Podobně se nahlédne, že pro $E = \{x \in X; f(x) \geq x\}$ je $x_1 = \sup E \in E$ největší pevný bod.

Buď M jakákoli část množiny $F = D \cap E$ pevných bodů a buď $m = \sup M$. Stejně jako výše je potom $f(m) \geq m$, a pro $x \geq m$ máme $f(x) \geq f(m) \geq m$. To znamená, že f zobrazuje úplný svaz $[m, 1] = \{x \in X; x \geq m\}$ do sebe. Podle předchozí části má zobrazení $f : [m, 1] \to [m, 1]$ pevné body, a stejně jako výše zjistíme, že nejmenším jeho pevným bodem právě infimum (neprázdné) množiny všech takových. To je pak nejmenší pevný bod zobrazení f ležící nad všemi prvky množiny M; jinými slovy, supremum množiny M ve svazu F. $\square$

Ve skutečnosti platí i obrácená implikace, totiž z existence pevných bodů monotónních zobrazení plyne úplnost svazu. Toto tvrzení uvedeme bez důkazu.

1.3.3 Věta (Davis). *Svaz $(X, \leq)$ je úplný právě tehdy, když každé monotónní zobrazení z $(X, \leq)$ do $(X, \leq)$ má pevný bod.*

1.3.4 Cvičení. Monotónní zobrazení mezi libovolnými uspořádanými množinami zobrazuje řetezec na řetezec a usměrněnou množinu na usměrněnou. Dejte příklad netriviálního monotónního zobrazení, při kterém se nelineární a neusměrněná podmnožina zobrazí na řetězec.

Kapitola 2

Topologie

2.1 Topologické prostory

2.1.1 Definice. Buď X neprázdná množina a τ nějaký systém jejích podmnožin. Řekneme, že τ je *topologie* na X, pokud (i) $\emptyset, X \in \tau$ (ii) pro $U, V \in \tau$ je také $U \cap V \in \tau$ a (iii) pro $U_\iota \in \tau$ je také $\bigcup U_\iota \in \tau$. Jinými slovy, topologie je systém podmnožin uzavřený na konečné průniky a libovolná sjednocení. V tomto kontextu se pak X nazývá *prostor*, prvky $x \in X$ jsou jeho *body*, a množiny $U \in \tau$ se nazývají *otevřené*. Jsou-li σ, τ dvě topologie na množině X takové, že $\sigma \subseteq \tau$, řekneme, že τ je *jemnější* a σ *hrubší*, nebo že τ *zjemňuje* σ.

Prostor X vybavený topologií τ budeme značit (X, τ), ale budeme mluvit i o topologickém prostoru X, bude-li zřejmé, kterou topologii máme na mysli.

2.1.2 Příklad. (a) Nejjemnější možnou topologií na množině X je *diskrétní topologie* $\tau = P(X)$, ve které jsou otevřené vůbec všechny podmnožiny. Opačným extrémem je *indiskrétní topologie* tvořená pouze množinami $\emptyset$ a X.

(b) Systém všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ s konečným doplňkem je topologie.

(c) Klasická (euklidovská) topologie na množině $\mathbb{R}$ reálných čísel je taková, ve které jsou otevřené právě ty množiny, které jsou sjednocením otevřených intervalů. To je obvyklá topologie reálné přímky, kterou čtenář zná z analýzy.

(d) Topologie na $\mathbb{R}$, jejíž otevřené množiny jsou právě všechna sjednocení *polouzavřených intervalů* tvaru $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, je jemnější než euklidovská topologie: každý otevřený interval (c, d) je sjednocením intervalů $[a, d)$ pro $c < a < d$, takže každá euklidovsky otevřená množina je otevřená i v této topologii. Množina $\mathbb{R}$ vybavená touto topologií se nazývá *Sorgenfreyova přímka*.

(e) Systém všech *polointervalů* tvaru (a, ∞) spolu s množinami $\mathbb{R}$ a $\emptyset$ tvoří topologii na $\mathbb{R}$. Podobně pro polointervaly $(-\infty, b)$. Tyto topologie jsou vzájemně *neporovnatelné*, tj. žádná z nich nezjemňuje druhou.

2.1.3 Cvičení. Topologie na množině X jsou uspořádány inkluzí. Diskrétní topologie $P(X)$ je největším prvkem tohoto uspořádání, a každý systém topologií má infimum vůči inkluzi, neboť průnik každého systému topologií na X je opět topologie na X. Tedy všechny topologie na X tvoří úplný svaz vůči inkluzi.

2.1.4 Definice. Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Množina $G \subseteq X$ je *okolí* bodu x, pokud existuje nějaká otevřená $U \in \tau$ tak, že $x \in U \subseteq G$.

Tedy otevřená množina je právě taková, která je okolím každého svého bodu. Systém všech okolí bodu $x \in X$ budeme značit $\mathcal{N}(x)$.

2.1.5 Cvičení. Pro systém $\mathcal{N}(x)$ okolí bodu $x \in X$ platí:

(1) pro $U \in \mathcal{N}(x)$ je $x \in U$;

(2) pro $U, V \in \mathcal{N}(x)$ je $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$;

(3) pro $U \in \mathcal{N}(x), U \subseteq V$ je $V \in \mathcal{N}(x)$;

(4) je-li $U \in \mathcal{N}(x)$, pak existuje $V \in \mathcal{N}(x)$ taková, že $V \subseteq U$ a pro každé $y \in V$ je $V \in \mathcal{N}(y)$, neboli $V \subseteq U$ je okolím každého svého bodu.

Je-li naopak každému bodu $x \in X$ přiřazen nějaký systém $\mathcal{N}(x) \subseteq P(X)$ splňující (1)–(3), pak množiny $U \subseteq X$ splňující $U \in \mathcal{N}(x)$ pro každé $x \in U$ tvoří topologii na X. Pokud navíc systémy $\mathcal{N}(x)$ splňují (4), je každé $\mathcal{N}(x)$ právě systémem všech okolí bodu $x \in X$ v této topologii.

2.1.6 Definice. Podmnožina F topologického prostoru se nazývá *uzavřená*, pokud její doplněk $X \setminus F$ je otevřená množina.

Systém všech uzavřených množin prostoru X zřejmě díky de Morganovým formulím splňuje vlastnosti duální k těm, které má systém všech otevřených množin: prázdná množina a prostor X jsou uzavřené, a každé konečné sjednocení a libovolný průnik uzavřených množin jsou opět uzavřené množiny. Uzavřené množiny uspořádané inkluzí tvoří úplný svaz.

V každém prostoru (X, τ) jsou množiny X a $\emptyset$ zároveň otevřené i uzavřené. Takové množiny se nazývají *obojetné*. Indiskrétní prostor žádné jiné obojetné množiny nemá; v diskrétním prostoru je naopak obojetná každá množina.

Množina $A \subseteq X$ je uzavřená právě když $X \setminus A$ je otevřená, tedy každý bod $x \in X \setminus A$ má nějaké okolí disjunktní s A. Jinými slovy, $A \subseteq X$ je uzavřená právě tehdy, když pro každý bod $x \in X$, jehož každé okolí protíná A, je $x \in A$.

2.1.7 Definice. Bod $x \in X$ je *hromadným bodem* množiny $A \subseteq X$, pokud každé okolí bodu x obsahuje nějaký bod z A, různý od x.

Tedy množina je uzavřená právě když obsahuje všechny své hromadné body. Pojem hromadného bodu je dosti názorný: body množiny A se „hromadí“ okolo bodu x. V indiskrétním prostoru je každý bod hromadným bodem každé neprázdné množiny; naopak v diskrétním prostoru žádné hromadné body nejsou.

2.1.8 Definice. Pro podmnožinu A topologického prostoru X buď $\overline{A}$ její *uzávěr* sestávající z bodů $x \in X$, jejichž každé okolí protíná A.

Podle předchozího je uzávěr $\overline{A}$ množiny A sjednocením množiny A a jejích hromadných bodů. Pojem uzávěru je topologickým vyjádřením představy *blízkosti*: body z uzávěru množiny A mají k této množině „blízko“ v tom smyslu, že žádným svým okolím se od ní nemohou oddělit.

Každá množina $A \subseteq X$ je podmnožinou svého uzávěru. Množina $\overline{A} \setminus A$ je pak *přírůstkem uzávěru*. Například přírůstek množiny $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ je jednobodový; naproti tomu přírůstek množiny $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tvoří všechna iracionální čísla.

2.1.9 Lemma. *Buď X topologický prostor.*

(1) *Každá množina tvaru $\overline{A} \subseteq X$ je uzavřená.*

(2) *Množina $A \subseteq X$ je uzavřená právě tehdy, když $A = \overline{A}$.*

(3) *Množina $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A.*

Důkaz. (1) Máme ukázat, že $G = X \setminus \overline{A}$ je otevřená, tedy že každý svůj bod obsahuje i s nějakým jeho okolím. Pokud tomu tak není, znamená to, že existuje nějaký bod $x \in G$ takový, že pro každé otevřené okolí U bodu x je $U \nsubseteq G$, to jest U protíná $\overline{A}$. Tedy existuje nějaké $y \in U \cap \overline{A}$, a jelikož je U okolím y, musí protínat A. Tedy každé okolí U bodu x protíná A, neboli $x \in \overline{A}$ — spor.

(2) Buď A uzavřená. Máme ukázat $\overline{A} \subseteq A$; buď tedy $x \in \overline{A}$. Pokud $x \notin A$, pak $U = X \setminus A$ je okolí bodu x, které neprotíná A; tedy $x \notin \overline{A}$ — spor.

(3) Množina $\overline{A}$ je uzavřená podle (1), a zřejmě $A \subseteq \overline{A}$. Máme ukázat, že $\overline{A}$ je nejmenší mezi všemi takovými. Buď tedy $F \subseteq X$ nějaká jiná uzavřená množina obsahující A. Je-li $x \in \overline{A}$, pak každé okolí U bodu x protíná A, a tedy také F. Je tedy $x \in \overline{F}$, a máme $\overline{A} \subseteq \overline{F}$. Přitom $\overline{F} = F$ podle (2), takže $\overline{A} \subseteq F$. □

Zobrazení, které každé podmnožině A prostoru X přiřazuje její uzávěr $\overline{A}$, je zobrazením z $P(X)$ do $P(X)$. Taková zobrazení se nazývají *operátory*.

Je-li naopak dán nějaký operátor na množině X, můžeme se ptát, jaké vlastnosti musí splňovat, aby byl uzávěrovým operátorem nějaké topologie na X. Tyto vlastnosti, tzv. *Kuratowskiho axiomy*, shrnuje následující věta.

2.1.10 Věta (Kuratowski)**.** *Buď X nějaká množina, a buď $cl : P(X) \to P(X)$ nějaké zobrazení, které splňuje následující podmínky.*

(1) $cl(\emptyset) = \emptyset$

(2) $A \subseteq cl(A)$

(3) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$

(4) $cl(cl(A)) = cl(A)$

Pak na X existuje jednoznačně určená topologie, ve které uzávěrem množiny A je právě $cl(A)$ a uzavřené jsou právě množiny tvaru $A = cl(A)$.

Vidíme tedy, že zadat uzávěrový operátor splňující Kuratowskiho axiomy je další způsob, jak na množině zavést topologii. Opačné tvrzení, totiž že uzávěrový operátor nějaké dané topologie splňuje (1)–(4), se snadno ověří.

Důkaz. Položme $\mathcal{F} = \{A \subseteq X; A = cl(A)\}$. Máme ukázat, že tento soubor množin je právě systémem uzavřených množin jisté topologie na X. Vlastnosti $\emptyset = cl(\emptyset) \in \mathcal{F}$ a $X = cl(X) \in \mathcal{F}$ dostáváme hned díky (1) a (2). Jsou-li $A = cl(A) \in \mathcal{F}$ a $B = cl(B) \in \mathcal{F}$, je $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B) = A \cup B \in \mathcal{F}$ díky (3), takže systém $\mathcal{F}$ je uzavřen na konečná sjednocení. Zbývá ověřit, že je uzavřen i na libovolné průniky. Všimněme si nejprve, že operátor cl je monotónní, tj. pro $A \subseteq B$ je $cl(A) \subseteq cl(B)$, neboť $cl(A) \cup cl(B) = cl(A \cup B) = cl(B)$. Buďte tedy konečně $A_i = cl(A_i) \in \mathcal{F}$ a označme $A = \bigcap A_i$. Pro každé i je díky monotonii $cl(A) \subseteq cl(A_i) = A_i$, neboť $A \subseteq A_i$. Tedy také $cl(A) \subseteq \bigcap A_i = A \in \mathcal{F}$. Položíme-li nyní $\tau = \{X \setminus A; A \in \mathcal{F}\}$, je τ topologie na X, a její uzavřené množiny jsou právě množiny z $\mathcal{F}$.

Zbývá ukázat, že pro každou $A \subseteq X$ je $\overline{A} = cl(A)$. Díky (4) je každá $cl(A)$ uzavřená v τ; přitom $A \subseteq cl(A)$ a zároveň $\overline{A}$ je *nejmenší* uzavřená množina obsahující A, takže $\overline{A} \subseteq cl(A)$. Podobně $cl(A) \subseteq cl(\overline{A}) = \overline{A}$. □

2.1.11 Cvičení. Ukažte, že Kuratowskiho axiomy jsou navzájem nezávislé, tj. že žádný z nich není důsledkem ostatních: pro každý z Kuratowskiho axiomů popište operátor, který splňuje Kuratowskiho axiomy *kromě* onoho zvoleného.

2.1.12 Příklad. Buď (X, τ) topologický prostor a $f : (P(X), \subseteq) \to (P(X), \subseteq)$ zobrazení, které každé množině přiřazuje její topologický uzávěr. To je monotónní zobrazení úplného svazu do sebe, a podle věty 1.3.2 má pevné body, totiž právě uzavřené podmnožiny. Ty tvoří úplný svaz, jehož suprema však nemusí být suprema původního svazu; například sjednocení jednobodových uzavřených $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ není uzavřená množina, jejich supremem v úplném svazu uzavřených podmnožin je teprve $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

2.1.13 Definice. Bod $x \in A$ množiny $A \subseteq X$ je jejím *vnitřním* bodem, pokud existuje otevřená množina $U \subseteq X$ tak, že $x \in U \subseteq A$. Množina $int(A)$ všech vnitřních bodů je *vnitřek* množiny A.

Pojem vnitřku je duální k pojmu uzávěru. Zřejmě $int(A) \subseteq A$, a snadno se ukáže, že vnitřek $int(A)$ množiny A je otevřená množina, totiž její největší otevřená podmnožina. Tedy A je otevřená právě když $A = int(A)$.

2.1.14 Příklad. V indiskrétním prostoru X je vnitřek každé množiny kromě X prázdný. V diskrétním prostoru je naopak každá množina svým vlastním vnitřkem. Vnitřek množiny $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je prázdný, a tedy také $\overline{int(\mathbb{Q})} = \emptyset$. Naopak uzávěrem $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je celá přímka, a tedy také $int(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}$. Uzávěr vnitřku a vnitřek uzávěru se tedy mohou podstatně lišit.

2.1.15 Cvičení. Vnitřek $int(A)$ množiny A tvoří právě body $x \in X$, které nejsou hromadnými body množiny $X \setminus A$. Uzávěrem $X \setminus A$ je právě $X \setminus int(A)$.

2.1.16 Cvičení. Zformulujte analogii Kuratowskiho axiomů uzávěru pro operátor vnitřku: je-li $i : P(X) \to P(X)$ nějaký operátor na množině X, a je-li τ systém množin $A \subseteq X$ splňujících $A = i(A)$, za jakých podmínek je τ topologie na X a $i(A)$ právě τ-vnitřek?

2.2 Báze a subbáze

2.2.1 Definice. Buď (X, τ) topologický prostor. Systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tvoří *otevřenou bazi* topologie τ, pokud každá otevřená množina je sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

Každá topologie je zřejmě svou vlastní bazí. Otevřené intervaly $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tvoří bazi klasické topologie přímky. Stejně tak intervaly $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ s racionálními konci tvoří bazi. Indiskrétní topologie má jednoprvkovou bazi; každá baze diskrétní topologie musí naopak obsahovat všechny singletony.

2.2.2 Cvičení. Systém $\mathcal{B} \subseteq \tau$ je bazí prostoru (X, τ) právě když pro každou otevřenou množinu $U \subseteq X$ a každý bod $x \in U$ existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in B \subseteq U$.

Ne každý systém množin je topologickou bazí. Například systém všech levých a pravých neomezených intervalů tvaru (a, ∞) a $(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R}$ nejenže není bazí klasické topologie, ale podle následující věty není bazí *žádné* topologie na $\mathbb{R}$,

2.2.3 Věta. *Systém množin $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je bazí nějaké topologie na $X = \bigcup \mathcal{B}$ právě tehdy, když pro každé dvě množiny $U, V \in \mathcal{B}$ a každý bod $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in W \subseteq U \cap V$.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{B}$ bazí nějaké topologie τ, pak pro otevřenou množinu $U \cap V$ a její bod $x \in U \cap V$ musí existovat nějaká bazová $W \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in W \subseteq U \cap V$.

V opačném směru buď $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ nějaký systém s uvedenou vlastností. Buď τ systém všech sjednocení množin z $\mathcal{B}$. Pak τ je topologie na X: prázdná množina a X padnou do τ triviálně; sjednocení množin z τ je sjednocením množin z $\mathcal{B}$ podle definice; zbývá ověřit průnikovou vlastnost. Buďte tedy $U, V \in \tau$. Průnik $U \cap V$ je buďto prázdný (a jsme hotovi), nebo pro každý bod $x \in U \cap V$ máme $U', V' \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in U' \cap V' \subseteq U \cap V$, neboť $U, V \in \tau$ jsou sjednocením množin z $\mathcal{B}$. Pro nějakou $W \in \mathcal{B}$ je tedy $x \in W \subseteq U' \cap V' \subseteq U \cap V$, takže i množina $U \cap V$ je sjednocením množin z $\mathcal{B}$, a τ je topologie. □

Systém $\mathcal{S}$ všech neomezených polointervalů v $\mathbb{R}$ sice není bazí žádné topologie, přesto však jistou topologii přirozeným způsobem určuje, totiž nejmenší takovou, která obsahuje všechny množiny z $\mathcal{S}$. To vede k následujícímu pojmu.

2.2.4 Definice. Buď (X, τ) topologický prostor. Systém $\mathcal{S} \subseteq \tau$ tvoří *otevřenou subbazi* topologie τ, pokud konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří bazi τ. Říkáme též, že systém $\mathcal{S}$ *generuje* topologii τ.

Z předchozího víme, že průnik každého systému topologií na X je opět topologie na X, takže pojem nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$ má dobrý smysl. Snadno se ukáže, že $\mathcal{S}$ je subbazí τ právě když τ je nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$. Například klasická topologie na $\mathbb{R}$ má subbazi sestávající z neomezených polointervalů. Stejně tak je subbazí systém neomezených polointervalů s racionálními konci. V úplném svazu všech topologií na X je spojením topologií σ, τ právě topologie generovaná subbazí $\sigma \cup \tau$.

2.3 Konvergence

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s pojmem limity posloupnosti reálných čísel, jakožto základním pojmem analýzy. Popíšeme nyní obecnější způsob konvergence, který je adekvátní pro popis obecných topologických prostorů.

2.3.1 Definice. Buď X topologický prostor, buď $(D, \leq)$ nějaké usměrněné uspořádání. Každý systém $\{x_m; m \in D\}$ se nazývá *net v* X. Pokud pro nějakou podmnožinu $A \subseteq X$ je každé $x_m \in A$, jedná se o *net v* A.

Pojem netu přímo zobecňuje pojem posloupnosti: jedná se o systém bodů indexovaný *nějakým* usměrněným uspořádáním. Posloupnost je tedy speciálním případem netu, kdy tímto usměrněným uspořádáním je právě $(\mathbb{N}, \leq)$. Pojem netu izoluje z indexové množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ jedinou potřebnou vlastnost, totiž usměrněnost, a naopak odstraňuje omezení dané spočetností.

Pro indexy $m, n \in D$ píšeme obvykle $n \geq m$ místo $m \leq n$, neboť v úvahách o konvergenci jde o indexy, které leží dostatečně daleko. Píšeme tedy většinou $(D, \geq)$ místo $(D, \leq)$, ale máme na mysli totéž uspořádání.

Buď X topologický prostor, buď $A \subseteq X$ a buď $\{x_m; m \in (D, \geq)\}$ net. Pokud pro každé $n \in D$ existuje $m \in D$ takové, že $m \geq n$ a $x_m \in A$, řekneme, že je *často* v A nebo že se *vrací* do A. Pokud dokonce existuje $n \in D$ takové, že pro všechna $m \geq n$ platí $x_m \in A$, řekneme, že je *nakonec* v A. Zřejmě druhá podmínka je podstatně silnější než první: seřadíme-li například všechna racionální čísla do nějaké posloupnosti $\{q_n; n \in \mathbb{N}\}$, pak net $\{q_n; n \in \mathbb{N}\}$ je často v každém otevřeném intervalu, ale nakonec není v žádném.

2.3.2 Definice. Buď X topologický prostor. Řekneme, že net $\{x_m; m \in (D, \geq)\}$ *konverguje* k bodu $x \in X$ (nebo že x je jeho *limitou*), pokud pro každé okolí $U \in \mathcal{N}(x)$ je $\{x_m; m \in (D, \geq)\}$ nakonec v U. V takové situaci píšeme obvykle $\{x_m; m \in (D, \geq)\} \to x$, nebo stručněji $x_m \to x$.

Ekvivalentně můžeme požadovat, aby daný net byl nakonec v každém bázovém okolí bodu x. K tomu pak stačí, aby byl nakonec v každém subbázovém okolí (z nějaké předem dané subbaze): je-li potom $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ nějaké bázové okolí, kde U_i jsou ze zvolené subbaze, existují podle předpokladu indexy $n_1, \ldots, n_k$ tak, že pro $m \geq n_i$ je $x_m \in U_i$. Přitom uspořádání $(D, \geq)$ je usměrněné, takže nějaké $n \in D$ leží za všemi $n_1, \ldots, n_k$, a pro $m \geq n$ je $x_m \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$.

Ukážeme nyní, že pomocí konvergence netů lze popsat topologii daného prostoru. Totiž pomocí konvergence netů lze popsat uzávěry množin; to pro posloupnosti neplatí, jak ukážeme níže.

2.3.3 Věta. *Buď X topologický prostor, $x \in X$ nějaký bod, a $A \subseteq X$. Pak $x \in \overline{A}$ právě tehdy, když nějaký net $\{x_m; m \in (D, \geq)\} \subseteq A$ konverguje k x.*

Důkaz. Je-li x limitou nějakého netu v A, pak v každém okolí $U \in \mathcal{N}(x)$ leží nějaké (dokonce od jistého indexu všechny) body tohoto netu, což jsou body z A. Tedy $x \in \overline{A}$. Buď naopak $x \in \overline{A}$. To znamená, že pro každé okolí $U \in \mathcal{N}(x)$ je průnik $U \cap A$ neprázdný. Zvolme v každém takovém průniku nějaký bod $x_U \in U \cap A$. To určuje net $\{x_U; U \in (\mathcal{N}(x), \subseteq)\}$ v A, který zřejmě konverguje k bodu x: je-li $V \in \mathcal{N}(x)$, pak pro všechny indexy $U \subseteq V$ je $x_U \in U \cap A \subseteq V \cap A \subseteq V$, takže net $\{x_U; U \in \mathcal{N}(x)\}$ je nakonec ve V. $\square$

Podle právě dokázané věty je znalost konvergence netů v daném topologickém prostoru stejně hodnotnou informací, jako znalost uzávěru. Tedy popis konvergence je dalším z ekvivalentních způsobů, jak zadat topologii na množině.

2.3.4 Příklad. Popíšeme *Arensův prostor*. Jeho nosnou množinou je kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spolu s jedním dalším bodem, který budeme značit ∞. Topologii zadáme popisem okolí bodů. Všechny body $(l, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou isolované (tedy každá množina $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je otevřená), a okolí bodu ∞ jsou množiny tvaru

$$U(f, k) = \{\infty\} \cup \{(l, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; k \leq l, f(l) \leq m\}$$

pro $k \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. (Vše nad grafem funkce f, odněkud počínaje.)

Bod ∞ leží v uzávěru množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, neboť ji protíná každým svým okolím. Podle předchozí věty to znamená, že nějaký net z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konverguje k ∞. Ukážeme ale, že žádná *posloupnost* z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ k bodu ∞ konvergovat nemůže.

Buď totiž $(x_i; i \in \mathbb{N})$ nějaká posloupnost v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Rozlišíme dvě možnosti. Pokud posloupnost (x_i) navštíví každý sloupec $\{(l, m); m \in \mathbb{N}\}$ jen konečněkrát, je tím určena funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která číslu $l \in \mathbb{N}$ přiřadí

$$f(l) = \max\{m \in \mathbb{N}; (l, m) = x_i \text{ pro nějaké } i \in \mathbb{N}\}.$$

Pak ovšem žádné x_i neleží v okolí $U(f, 0)$ bodu ∞.

Pokud naopak (x_i) navštíví nějaký l-tý sloupec nekonečněkrát, pak je často mimo okolí $U(\overline{0}, l + 1)$, kde $\overline{0}$ značí funkci s konstantní hodnotou 0. Tedy ani v tomto případě (x_i) nekonverguje k ∞.

Existují nicméně prostory, jejichž topologii lze popsat posloupnostmi. Nejprominentnější z nich je reálná přímka, obecněji pak každý metrický prostor, ještě obecněji pak *prvospočetné* prostory.

2.3.5 Definice. Buď X topologický prostor a $x \in X$ bod. Řekneme, že systém $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}(x)$ otevřených okolí tvoří *lokální bazi* v bodě x, pokud pro každé okolí V bodu x existuje nějaké $U \in \mathcal{U}$ tak, že $x \in U \subseteq V$. Má-li každý bod $x \in X$ spočetnou lokální bazi, pak řekneme, že prostor X je *prvospočetný*.

Zřejmě každý prostor se spočetnou bazí je prvospočetný, neboť baze topologie je lokální bazí v každém bodě. Tedy reálná přímka je prvospočetný prostor. Obecněji každý metrický prostor (X, d) je prvospočetný, neboť pro bod $x \in X$ tvoří $U_n(x) = \{y \in X; d(x, y) < 1/n\}$ lokální bazi. V prvospočetných prostorech lze nety nahradit posloupnostmi: platí v nich následující obdoba věty 2.3.3.

2.3.6 Věta. *Buď X prvospočetný prostor, $x \in X$ nějaký bod, a $A \subseteq X$. Pak $x \in \overline{A}$ právě tehdy, když nějaká posloupnost $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ konverguje k x.*

Věta se dokáže stejně jako věta 2.3.3 pro obecné prostory, díky provospočetnosti lze ovšem místo netu vybrat dokonce posloupnost bodů $x_n \in U_n$, kde $\{U_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}(x)$ je spočetná lokální baze.

2.3.7 Cvičení. Z výše uvedené věty dostáváme jako důsledek, že bod ∞ v Arensově prostoru nemůže mít spočetnou lokální bazi. Zkuste to dokázat přímo: pro zadaný systém spočetně mnoha okolí $U_n \in \mathcal{N}(\infty)$ popište nějaké další okolí U, pod kterým neleží žádné U_n.

2.4 Spojitost

2.4.1 Definice. Zobrazení $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ mezi dvěma topologickými prostory je *spojité*, pokud vzor každé otevřené množiny je otevřený, to jest pokud $f^{-1}[V] \in \sigma$ pro každou $V \in \tau$.

2.4.2 Věta. *Pro zobrazení $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ mezi dvěma topologickými prostory jsou následující podmínky ekvivalentní.*

1. *Vzor každé otevřené množiny je otevřený.*
2. *Vzor každé otevřené množiny z nějaké baze pro τ je otevřený.*
3. *Vzor každé otevřené množiny z nějaké subbaze pro τ je otevřený.*
4. *Vzor každé uzavřené množiny je uzavřený.*
5. *Pro okolí V bodu $f(x) \in Y$ existuje okolí U bodu $x \in X$ tak, že $f[U] \subseteq V$.*
6. *f zachovává konvergenci netů, tj. pro $\{x_m; m \in (D, \geq)\} \to x$ v X je $\{f(x_m); m \in (D, \geq)\} \to f(x)$ v Y.*
7. *Je-li $x \in \overline{A}$ v X, je $f(x) \in \overline{f[A]}$ v Y.*
8. *Pro $B \subseteq Y$ je $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$.*

2.4.3 Lemma. *Buďte $f, g : X \to Y$ spojitá zobrazení z prostoru X do Hausdorffova prostoru Y. Potom množina $A = \{a \in X; f(a) = g(a)\}$ je uzavřená.*

Důkaz. Buď $x \in X \setminus A$, tedy $f(x) \neq g(x)$. Jelikož prostor Y je Hausdorffův, existují navzájem disjunktní otevřené množiny $U, V \subseteq Y$ tak, že $f(x) \in U$ a $g(x) \in V$. Přitom f, g jsou spojité, takže $G = f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$ je otevřené okolí bodu x. Zároveň G je disjunktní s A: pro $a \in A \cap G$, by bylo $f(a) = g(a)$, přitom $f(a) \in U, g(a) \in V$, což není možné. □

2.4.4 Důsledek. *Pokud se dvě spojitá z prostoru X do Hausdorffova prostoru Y shodují na husté množině, pak se již shodují na celém prostoru X.*

Známým případem právě dokázaného lemmatu je tvrzení z analýzy, podle kterého je spojitá reálná funkce určena již svým průběhem na množině $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

2.5 Oddělovací vlastnosti

2.5.1 Definice. Topologický prostor (X, τ) se nazývá

(i) T_0-*prostor*, pokud pro každé dva různé body $x, y \in X$ existuje množina $U \in \tau$, která obsahuje právě jeden z nich.

(ii) T_1-*prostor*, pokud pro každé dva různé body $x, y \in X$ existuje množina $U \in \tau$ taková, že $x \in U$ a $y \notin U$.

(iii) T_2-*prostor* neboli *Hausdorffův prostor*, pokud pro každé dva různé body $x, y \in X$ existují disjunktní otevřené množiny U, V tak, že $x \in U$ a $y \in V$.

Zřejmě indiskrétní prostor nemá žádnou z těchto vlastností a diskrétní prostor má všechny. Snadno se nahlédne, že $T_2 \to T_1 \to T_0$, ale žádná z obrácených implikací neplatí.

2.5.2 Příklad. (a) Dvoubodový prostor $X = \{x, y\}$ s topologií $\{\emptyset, \{x\}, X\}$ je T_0, ale není T_1, protože bod y nelze žádným okolím oddělit od bodu x.

(b) Konečný prostor, který je T_1, je už nutně diskrétní.

(c) Prostor je T_1 právě tehdy, když každá jednobodová množina $\{x\}$ je uzavřená, což je právě tehdy, když každá konečná množina je uzavřená. Zřejmě topologie sestávající z množin s konečným doplňkem (tzv. *cofinite topology*) je nejmenší možná T_1 topologie na nekonečné množině X. Tato topologie je souvislá a není T_2, neboť každé dvě neprázdné otevřené množiny se protínají.

(d) Klasická topologie reálné přímky je T_2.

2.5.3 Cvičení. Je-li A podmnožina T_1 prostoru X, pak hromadné body množiny A tvoří uzavřenou množinu. Hromadné body každé množiny tvoří uzavřenou množinu právě tehdy, když hromadné body každé jednobodové $\{x\}$ tvoří uzavřenou množinu.

2.5.4 Věta. *Prostor je T_2 právě tehdy, když každý net má nanejvýš jednu limitu.*

Důkaz. Buď $\{x_m; m \in (D, \geq)\}$ nějaký net, a buďte x a y dva různé body. Je-li X Hausdorffův, jsou body x a y odděleny disjunktními okolími, to jest existují disjunktní otevřené množiny $U, V \subseteq X$ takové, že $x \in U$ a $y \in V$. Pokud $\{x_m\} \to x$ a $\{x_m\} \to y$, musí od jistého $m_0 \in D$ počínaje být $x_m \in U$ a od jistého $m_1 \in D$ být $x_m \in V$. Přitom množina $(D, \geq)$ je usměrněná, takže existuje $n \in D$ takové, že $n \geq m_1, m_2$. Pro $m \geq n$ je potom $x_m \in U$ i $x_m \in V$ zároveň. To ale není možné, protože U a V jsou disjunktní.[1]

Pokud X není Hausdorffův, existují body $x, y \in X$, které nejsou oddělitelné otevřenými okolími. To jest pro každou $U \in \mathcal{N}(x)$ a každou $V \in \mathcal{N}(y)$ je průnik $U \cap V$ neprázdný. Zvolme v každém takovém průniku nějaký (libovolný) bod $x_{(U,V)} \in U \cap V$. Tím je určen net $\left\{x_{(U,V)}; (U,V) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)\right\}$ indexovaný usměrněnou množinou $(\mathcal{N}(x), \supseteq) \times (\mathcal{N}(y), \supseteq)$. To je vskutku usměrněné uspořádání, neboť je součinem dvou takových. Snadno se nyní nahlédne, že tento net konverguje k oběma bodům x, y. $\square$

Ukážeme, že ani v předchozí větě nelze nety nahradit posloupnostmi. To je další ukázka nedostatečnosti posloupností pro popis topologie, a důvod, proč zobecnění na nety zavádět.

2.5.5 Definice. Topologický prostor (X, τ) má *unique limit property* (ULP), pokud každá *posloupnost* má nejvýše jednu limitu.

Každý ULP prostor je T_1, protože kdyby body $x, y \in X$ nebyly T_1-oddělitelné (řekněme, že y nelze žádným okolím oddělit od x, druhý případ je analogický) pak konstantní posloupnost (x) má dvě různé limity, a sice body x a y. Zároveň T_2 prostor je ULP podle 2.5.4. Máme tedy $T_2 \to ULP \to T_1$. Ukážeme, že žádná z obrácených implikací neplatí.

2.5.6 Příklad. (a) Topologie konečných doplňků z předchozího příkladu (c) je T_1, ale není ULP: každá posloupnost sestávající z nekonečně mnoha různých bodů má za limitu každý bod z X. Tedy oddělovací vlastnosti této topologie jsou velmi chabé: každá (netriviální) posloupnost konverguje ke každému bodu.

(b) Popíšeme prostor, který je ULP, ale není T_2. Jeho nosnou množinou je $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{p, q\}$, kde body $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou isolované, okolími bodu p jsou právě množiny $U_k = \{p\} \cup \{(m,n); m \geq k\}$ pro $k \in N$, a okolími bodu q jsou právě množiny $V_f = \{q\} \cup \{(m,n); n \geq f(m)\}$ pro $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jediné netriviální oddělovací podmínky jsou na oddělení bodů p a q. Jest $p \notin V_f$ a $q \notin U_k$, takže X je T_1. Každé okolí U_k bodu p a každé okolí V_f bodu q se však protínají (dokonce v nekonečné množině), takže X není T_2. Ukážeme, že je ULP.

Buď (x_i) nějaká netriviální posloupnost. Pokud konverguje ke dvěma různým bodům, nemůže být ani jeden z nich isolovaný (takový bod je jedinou možnou limitou). Zajímavý je tedy jen případ, kdy (x_i) konverguje zároveň k bodům p a q. Rozlišíme dva případy. Pokud posloupnost (x_i) navštíví každý sloupec v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jen konečněkrát (formálně: pokud pro každé $m \in \mathbb{N}$ je množina $\{n \in \mathbb{N}; (\exists i \in \mathbb{N})(x_i = (m,n))\}$ konečná), je tím určena funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která na každém $m \in \mathbb{N}$ dává tento (konečný) počet $f(m)$ výskytů. Tím je určeno okolí V_f bodu q, ve kterém neleží dokonce žádné x_i, tedy posloupnost (x_i) jistě nekonverguje k bodu q. Pokud naopak posloupnost (x_i) nekonečně často navštíví nějaký k-tý sloupec $\{(k,n); n \in \mathbb{N}\}$, pak nemůže být nakonec v okolí U_{k+1} bodu p, takže nekonverguje k p.

Topologické prostory „geometrické povahy" jsou typicky alespoň T_2. Například metrické prostory mají ještě mnohem silnější oddělovací vlastnosti: jsou

[1] Tento důkaz je téměř totožný s důkazem podobné věty v reálné analýze, kde jedinou vlastností uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \geq)$, která se využije, je právě usměrněnost.

normální, tj. každé dvě uzavřené množiny lze oddělit otevřenými okolími. Existují dokonce prostory, jejichž topologie je tak jemná, že neobsahuje žádné (netriviální) konvergentní posloupnosti, a přitom není diskrétní. V jiných oblastech matematiky a informatiky se však přirozeně vyskytují topologické prostory, které jsou například T_0, a T_1 už jen v triviálních případech.

2.6 Kompaktnost

2.6.1 Definice. Je-li (X, τ) topologický prostor, pak systém $\mathcal{U} \subseteq \tau$ je *(otevřeným) pokrytím* prostoru X, pokud $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, tj. pokud pro každý bod $x \in X$ existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $x \in U$. Prostor (X, τ) je *kompaktní*, pokud každé pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X má konečné podpokrytí, tj. pokud existuje nějaký *konečný* podsystém $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, který je stále pokrytím.

2.6.2 Příklad. Systém $\mathcal{U}$ otevřených intervalů $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ pro $n \in \mathbb{N}$ tvoří otevřené pokrytí intervalu $(0, 1)$, ze kterého nelze vybrat žádné konečné podpokrytí. (Ještě hůře: odstraněním byť jediného intervalu přestává být $\mathcal{U}$ pokrytím.) Tedy otevřený interval $(0, 1)$ není kompaktní. Podobně se nahlédne, že ani žádný jiný otevřený interval ani sama reálná přímka $\mathbb{R}$ není kompaktní.

2.6.3 Příklad. Uzavřený interval $[0, 1]$ je kompaktní. Buď totiž $\mathcal{U}$ nějaké otevřené pokrytí. Označme jako M množinu těch $x \in [0, 1]$, pro které existuje nějaké konečné podpokrytí intervalu $[0, x]$. Množina M je neprázdná (máme $0 \in M$), a zřejmě obsahuje s každým $x \in M$ i každé $y < x$. Zároveň M je shora omezená, neboť $M \subseteq [0, 1]$. Tedy M má supremum v $\mathbb{R}$, označme ho $s \in [0, 1]$. Ukážeme, že $s = 1$, tím bude tvrzení dokázáno.

Předpokládejme pro spor, že je $s < 1$. Zvolme nějakou $U \in \mathcal{U}$ takovou, že $s \in U$; taková U musí existovat, protože $\mathcal{U}$ je pokrytí. Přitom U je otevřená, tedy existují $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $s \in (a, b) \subseteq U$. Pak ale $a \in M$, neboli existuje nějaký konečný podsystém $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ pokrývající $[0, a]$. Zvolíme-li nyní $V \in \mathcal{U}$ tak, že $b \in V$, je $\mathcal{U}_0 \cup \{U, V\}$ konečným pokrytím $[0, b]$. Tedy je také $b \in M$; přitom $b > s = \sup M$ — spor.

2.6.4 Cvičení. Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní. Kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru je uzavřená. Tedy v kompaktním Hausdorffově prostoru jsou uzavřené podmnožiny právě kompaktní podmnožiny.

2.6.5 Věta. *Prostor X je kompaktní právě tehdy, když každý centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik.*

Důkaz. Buď X kompaktní, buď $\mathcal{F}$ nějaký centrovaný systém uzavřených množin. Uvažme systém $\mathcal{U} = \{X \setminus F; F \in \mathcal{F}\}$. Je-li průnik $\bigcap \mathcal{F}$ prázdný, znamená to právě tolik, že $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí. Tedy z kompaktnosti existuje nějaké konečné podpokrytí $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Pak ale konečný podsystém $\{F \in \mathcal{F}; X \setminus F \in \mathcal{U}_0\} \subseteq \mathcal{F}$ má prázdný průnik, takže $\mathcal{F}$ není centrovaný systém — spor.

Buď naopak X prostor, ve kterém každý centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik. Ukážeme, že takový prostor je kompaktní. Buď totiž $\mathcal{U}$ nějaké otevřené pokrytí. Pokud $\mathcal{U}$ nemá žádné konečné podpokrytí, znamená to, že systém uzavřených množin $\mathcal{F} = \{X \setminus U; U \in \mathcal{U}\}$ je centrovaný. Přitom má prázdný průnik, neboť $\mathcal{U}$ je pokrytí — spor. □

2.6.6 Cvičení. Je-li X kompaktní prostor a $f : X \to Y$ spojité zobrazení, pak také $f[X]$ je kompaktní. Jinými slovy, spojitý obraz kompaktu je kompakt.

2.7 Podprostory

2.7.1 Definice. Buď (X, τ) topologický prostor a buď $Y \subseteq X$. Potom systém $\tau|Y = \{U \cap Y; U \in \tau\}$ je *relativizace* topologie τ na množinu $Y \subseteq X$. Topologický prostor Y obdařený touto topologií je *podprostor* prostoru X.

Snadno se ověří, že $\tau|Y$ je skutečně topologie na Y. Každá podmnožina Y prostoru X je tedy sama topologickým prostorem, jehož otevřené množiny jsou právě tvaru $U \cap Y$, kde U je otevřená v X, a tedy uzavřené množiny jsou právě tvaru $F \cap Y$, kde F je uzavřená v X. Podobně se relativizují i ostatní pojmy: označíme-li $\sigma = \tau|Y$, pak bod $y \in Y \subseteq X$ je σ-hromadným bodem množiny $A \subseteq Y$ právě když je jejím τ-hromadným bodem, a σ-uzávěr množiny $A \subseteq Y$ je právě průnik jejího τ-uzávěru s množinou Y.

2.8 Sumy

2.8.1 Definice. Buďte $(X_i, \sigma_i), i \in I$ topologické prostory. Potom jejich *suma* je disjunktní[2] sjednocení $\bigoplus_{i \in I} X_i$ opatřené topologií, ve které množina U je otevřená právě když každá $U \cap X_i$ je otevřená v (X_i, σ_i).

Snadno se ověří, že takový systém množin skutečně tvoří topologii. Můžeme obrazně říci, že suma vznikne položením prostorů (X_i, σ_i) vedle sebe. Prostory X_i jsou její otevřené podprostory, suma tedy není souvislý prostor.

2.8.2 Věta. *Topologie sumy je nejjemnější možná topologie na disjunktním sjednocení $\bigoplus X_i$, při které jsou všechna vnoření $e_i : X_i \to \bigoplus X_i$ spojitá.*

Důkaz. Předně všechna vnoření $e_i : X_i \to \bigoplus X_i$ jsou skutečně spojitá: je-li $U \subseteq \bigoplus X_i$ otevřená v topologii sumy, je také $e_i^{-1}[U] = U \cap X_i$ otevřená. Je-li σ nějaká jiná topologie na $\bigoplus X_i$, při které jsou všechna vnoření e_i spojitá, buď $U \in \sigma$. Ze spojitosti je pak každá $e_i^{-1}[U] = U \cap X_i$ otevřená, což ale znamená právě tolik, že U je otevřená v topologii sumy. $\square$

Říkáme též, že topologie sumy je *injektivně vytvořena* souborem zobrazení $\{e_i; i \in I\}$. Obsahuje jako otevřené množiny všechny takové, které mají při všech e_i otevřené vzory; je tedy nejjemnější ze všech takových topologií.

2.8.3 Lemma. *Buďte (X_i, σ_i) topologické prostory. Potom $\mathcal{B} \subseteq P(\bigoplus X_i)$ je bazí topologie sumy právě když každé $\mathcal{B}|X_i = \{B \cap X_i; B \in \mathcal{B}\}$ je báze prostoru (X_i, σ_i). Stejné tvrzení platí pro subbázi.*

2.8.4 Lemma. *Buďte (X_i, σ_i) topologické prostory, buď $A \subseteq \bigoplus X_i$. Potom uzávěr $\overline{A}$ množiny A v sumě $\bigoplus X_i$ je sjednocení $\bigcup \overline{(A \cap X_i)}^{\sigma_i}$ uzávěrů jejích částí $A \cap X_i \in (X_i, \sigma_i)$. Stejné tvrzení platí pro vnitřek.*

2.8.5 Lemma. *Buďte (X_i, σ_i) topologické prostory. Net $\{a_n; n \in (D, \geq)\}$ v prostoru $\bigoplus X_i$ konverguje k bodu $x \in X_i$ právě tehdy, když od jistého indexu $m \in D$ je $\{a_n; n \geq m\} \subseteq X_i$ a net $\{a_n; n \geq m\}$ konverguje k bodu $x \in (X_i, \sigma_i)$.*

2.8.6 Lemma. *Buďte (X_i, σ_i) a (Y, τ) topologické prostory. Potom zobrazení $f : \bigoplus X_i \to Y$ je spojité právě když každé $f|X_i : (X_i, \sigma_i) \to (Y, \tau)$ je spojité.*

[2] Množiny $\{i\} \times X_i$ jsou disjunktní i v případě, že $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, přitom prostory X_i a $\{i\} \times X_i$ jsou homeomorfní. Buď tedy $\bigoplus X_i = \bigcup_{i \in I}(\{i\} \times X_i)$.

2.9 Produkty

2.9.1 Definice. Buďte (X_i, σ_i) topologické prostory. Potom jejich *produkt* je kartézský součin ΠX_i s topologií generovanou subbazí $\left\{\pi_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \sigma_i\right\}$, kde $\pi_i : \Pi X_i \to X_i$ je projekce na i-tou složku.

Bazí produktové topologie jsou tedy množiny tvaru

$$\pi_{i_1}^{-1}[U_{i_1}] \cap \pi_{i_2}^{-1}[U_{i_2}] \cap \cdots \cap \pi_{i_k}^{-1}[U_{i_k}]$$

pro nějakých konečně mnoho $i_1, \ldots, i_k \in I$ a nějaké (bez újmy na obecnosti bázové či dokonce subbázové) otevřené množiny $U_{i_j} \subseteq X_{i_j}$.

2.9.2 Příklad. Topologie produktu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je právě klasická eukleidovská topologie. Bazí produktové topologie jsou z definice právě „obdélníky“ tvaru $U \times V$, kde $U, V \subseteq \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. Pro každé $(x, y) \in U \times V$ existuje otevřený kruh (tj. metrické okolí) W splňující $(x, y) \in W \subseteq U \times V$, a zároveň naopak; obě topologie tedy mají tytéž otevřené množiny. Podobně pro $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a další.

2.9.3 Věta. *Topologie produktu je nejhrubší možná topologie na kartézském součinu ΠX_i, při které jsou všechny projekce $\pi_i : \Pi X_i \to X_i$ spojité.*

Důkaz. Předně všechny projekce skutečně jsou spojité: je-li $U \subseteq X_i$ otevřená množina, je $\pi_i^{-1}[U]$ z definice otevřená (subbázová) v topologii produktu. Je-li naopak σ nějaká topologie na kartézském součinu ΠX_i, při které jsou všechny projekce $\pi_i^{-1} : (\Pi X_i, \sigma) \to (X_i, \sigma_i)$ spojité, pak každá $\pi_i^{-1}[U]$ musí být otevřená v topologii σ. To znamená, že σ obsahuje celou subbazi produktové topologie, a tedy obsahuje celou produktovou topologii. □

Říkáme též, že topologie produktu je *projektivně vytvořena* souborem zobrazení $\{\pi_i; i \in I\}$. Do její subbaze jsme jako otevřené množiny zahrnuli jen ty, které otevřené být musí, mají-li být projekce π_i spojité, totiž vzory $\pi_i^{-1}[U]$ otevřených množin $U \subseteq X_i$. Produktová topologie je tedy nejhrubší taková.

2.9.4 Lemma. *Net $\{f_m; m \in (D, \geq)\}$ v topologii produktu konverguje k bodu $f \in \Pi X_i$ právě tehdy, když k němu konverguje bodově.*

Důkaz. Buď $f_m \to f$ v produktové topologii. Buď $i \in I$ libovolné, buď $U \subseteq X_i$ nějaké okolí bodu $f(i) \in X_i$. Množina $\pi_i^{-1}[U]$ je otevřeným subbázovým okolím bodu f v produktu, takže díky $f_m \to f$ musí pro všechny indexy $m \in D$ za nějakým pevným $n \in D$ být $f_m \in \pi_i^{-1}[U]$, což ale znamená právě tolik, že $f_m(i) \in U$. To znamená, že f_m bodově konvergují k f.

Je-li naopak f bodovou limitou $\{f_m; m \in (D, \geq)\}$, znamená to, že pro každé $i \in I$ a každé okolí $U \subseteq X_i$ bodu $f(i) \in X_i$ je od jistého indexu dále $f_m(i) \in U$; tedy v každém subbázovém okolí $\pi_i^{-1}[U]$ bodu $f \in \Pi X_i$ leží všechny f_m od jistého indexu dále. To ale podle poznámky za 2.3.2 již znamená, že $f_m \to f$. □

Podle 2.3.3 je topologie plně určena tím, které nety konvergují ke kterým bodům (neboť tím jsou plně určeny uzávěry množin). Podle právě dokázaného lemmatu konvergují nety v produktové topologii právě ke svým bodovým limitám. Říkáme též, že produktová topologie je právě *topologie bodové konvergence*.

2.9.5 Příklad. Speciálním případem produktu $\Pi_{i \in I} X_i$ je *mocnina* X^I prostoru X, když $X_i = X$ pro každé $i \in I$. Například $2^{\mathbb{N}}$ je spočetná mocnina dvoubodového diskrétního prostoru $2 = \{0, 1\}$, jejími prvky jsou právě spočetné binární posloupnosti. Položíme-li $a_n(i) = 1$ pro $i = n$ a $a_n(i) = 0$ jinak, máme $A = \{a_n; n \in N\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Ukážeme, že v přírůstku $\overline{A}$ leží jen nulová posloupnost.

Bázové okolí konstantně nulové posloupnosti jakožto prvku prostoru $2^{\mathbb{N}}$ je tvaru $\pi_{i_1}^{-1}[0] \cap \ldots \cap \pi_{i_k}^{-1}[0]$, tedy fixace na (jednobodové) okolí $\{0\}$ na konečně mnoha indexech $i_1, \ldots, i_k$. Do každého takového okolí ovšem padne každé $a_n \in A$ s indexem $n \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. To znamená, že nulová posloupnost padne do $\overline{A}$. Je-li naopak $f \in 2^{\mathbb{N}}$ nenulová na více místech, stačí zvolit $i, j \in \mathbb{N}$ různé, pro které $f(i) = 1 = f(j)$; okolí $\pi_i^{-1}[1] \cap \pi_j^{-1}[1]$ pak odděluje bod f od množiny A.

2.9.6 Lemma. *Produkt ΠX_i je T_2 právě když všechny prostory X_i jsou T_2.*

Důkaz. Jsou-li všechny X_i Hausdorffovy, buďte $x = (x_i)$ a $y = (y_i)$ dva různé body v produktu ΠX_i. To znamená, že pro alespoň jeden index $i \in I$ je $x_i \neq y_i$; přitom X_i je Hausdorffův prostor, takže existují navzájem disjunktní otevřené množniny $U, V \subseteq X_i$ tak, že $x_i \in U$ a $y_i \in V$. Potom ale $\pi_i^{-1}[U]$ a $\pi_i^{-1}[U]$ jsou navzájem disjunktní otevřená okolí bodů x, y. Pokud naopak některý z prostorů X_i není Hausdorffův, buďte $a, b \in X_i$ neoddělitelné, tj. každá jejich okolí se protínají. Pokud potom položíme $x_i = a, y_i = b$ a zvolíme $x_j = y_j \in X_j$ pro $j \neq i$, budou $x = (x_i), y = (y_i)$ neoddělitelné v ΠX_i. □

2.9.7 Cvičení. Prostor X je Hausdorffův právě tehdy, když *diagonála*, tj. množina $\{(x, x); x \in X\}$ je uzavřená v produktu $X \times X$.

2.9.8 Lemma. *Zobrazení $f : X \to \Pi X_i$ je spojité právě tehdy, když pro každé $i \in I$ je složení $\pi_i \circ f : X \to X_i$ funkce f s následnou projekcí spojité.*

Důkaz. Je-li f spojitá, je každé $\pi_i \circ f$ složením spojitých funkcí, a tedy je spojité. Je-li naopak každé takové složení spojité, buď $U \subseteq X_i$ libovolná otevřená množina; potom subbázová otevřená množina $\pi_i^{-1}[U]$ má při f otevřený vzor, neboť $f^{-1}[\pi_i^{-1}[U]]$ je právě $(\pi_i \circ f)^{-1}[U]$. To znamená, že f je spojitá. □

Kapitola 3

Denotační sémantika

3.1 Datové typy

Budování sémantiky lze těžko začít jinak, než popisem *datových typů*. První možnou představou datového typu jako matematického objektu je zřejmě množina všech hodnot, které může proměnná daného typu nabývat. Taková představa je však příliš jednoduchá: objekty daného typu netvoří pouhou množinu prvků, jsou mezi sebou v jistých vztazích. Ke struktuře, kterou budeme datové typy obdařovat, nás vede idea *aproximace* — jeden ze dvou prvků datového typu může v nějakém smyslu „lépe aproximovat" jistou „ideální" hodnotu, nést „více informace", nebo být v nějakém ohledu „přesnější".

Přirozený způsob, jak takové vztahy zachytit, je struktura uspořádané množiny. Budeme datové typy modelovat množnami $(D, \sqsubseteq)$ s nějakou vhodnou relací (částečného) uspořádání.

Je potom otázkou, které další vlastnosti po těchto uspořádáních žádat. Je-li například $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq x_{n+1} \sqsubseteq \ldots$ nějaká posloupnost čím dál „lepších" aproximací, je přirozené požadovat, aby měly nějakou „limitu" $x = \bigsqcup_n x_n \in D$, která ponese „všechnu informaci" zachycenou jednotlivými x_n. V uspořádaných množinách je vhodným zachycením takových představ pojem suprema. Požadavek existence všech suprem pak vede na pojem úplného svazu. Ukazuje se, že vhodným modelem jsou *spojité svazy*, které lze ekvivalentně popsat jako *injektivní* T_0 prostory.[1]

3.1.1 Injektivní prostory

Topologické prostory uvažované v této kapitole jsou vždy T_0. Z topologického úvodu víme, že se jedná o nejslabší oddělovací vlastnost; klasické „geometrické" případy v obecné topologii jsou většinou alespoň T_2. Třída T_0 prostorů se však ukáže být přirozená: uvažované prostory budou T_1 jen v triviálním případě.

3.1.1 Definice. T_0-prostor D je *injektivní*, pokud pro každé T_0-prostory $X \subseteq Y$ a každé spojité zobrazení $f : X \to D$ existuje spojité rozšíření $\overline{f} : Y \to D$.

3.1.2 Příklad. Dvoubodový *Sierpinskiho prostor* $\mathcal{S} = \{\perp, \top\}$ s otevřenými množinami $\emptyset, \{\top\}, \mathcal{S}$ je T_0, ale není T_1. Ukážeme, že je injektivní. Každé spojité

[1] Poznamenejme, že topologie je jednou z oblastí, kde našla teorie svazů široké uplatnění.

zobrazení $f : X \to \mathcal{S}$ vzájemně jednoznačně koresponduje s otevřenou množinou $f^{-1}[\top] \subseteq X$. Je-li $X \subseteq Y$, je každá otevřená množina v X restrikcí nějaké otevřené množiny v Y; tím je určeno rozšíření $\overline{f} : Y \to D$.

3.1.3 Lemma. *Součin injektivních prostorů je injektivní.*

Důkaz. Dané zobrazení f z prostoru X do součinu $D = \prod_{i \in I} D_i$ lze prodloužit o projekce $\pi_i : D \to D_i$, načež $\pi_i \circ f : X \to D_i$ mají spojitá rozšíření $\overline{f_i} : X \to D_i$, neboť D_i jsou injektivní. Stačí tedy položit $\overline{f}(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. □

3.1.4 Lemma. *Retrakt injektivního prostoru je injektivní.*

Důkaz. Buď $D \subseteq D'$ retrakt injektivního prostoru, kde $r : D' \to D$ je svědčící retrakce, buď $f : X \to D$ a $X \subseteq Y$. Zobrazení $f : X \to D$ je zároveň zobrazením do D', a tedy má spojité rozšíření $\overline{f} : Y \to D'$, neboť D' je injektivní. Dané $f : X \to D$ se tedy rozšiřuje na $r \circ \overline{f} : Y \to D$. □

3.1.5 Lemma. *Každý T_0 prostor lze vnořit do mocniny Sierpinskiho prostoru. Tedy každý T_0 prostor se vnořuje do injektivního prostoru.*

Důkaz. Buď (X, τ) daný T_0-prostor. Definujeme vnoření $e : X \to \mathcal{S}^\tau$ následovně. Buď $x \in X$ a buď $U \subseteq X$ otevřená množina. V případě $x \in U$ položme $e(x)(U) = \top$; jinak $e(x)(U) = \bot$. Zobrazení e je spojité, neboť vzory subbázových množin jsou otevřené; je prosté, neboť prostor X je T_0; a je také otevřené, neboť pro otevřenou $U \subseteq X$ je $e[U] = \{e(x); x \in U\} = \{e(x); e(x)(U) = \top\} = e[X] \cap \{d \in D; d(U) = \top\}$ otevřená množina v $e[X]$. Tedy e je vnoření. □

3.1.6 Důsledek. *Injektivní prostory jsou právě retrakty mocnin $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Víme již, že takové retrakty jsou injektivní. Naopak každý T_0 prostor D je vnořen jako podprostor do mocniny $\mathcal{S}$, a je-li injektivní, rozšiřuje se identita $i : D \to D$ na hledanou retrakci $r : \mathcal{S} \to D$. □

3.1.7 Důsledek. *T_0 prostor je injektivní právě tehdy, když je retraktem každého prostoru, jehož je podprostorem.*

3.1.2 Scott topology

Struktura T_0-prostoru X určuje na množině X zároveň uspořádání, položíme-li $x \sqsubseteq y$ právě tehdy, když y leží v každé otevřené množině, ve které leží x. To je právě když $x \in \overline{\{y\}}$; jinak řečeno, právě když bod x není oddělitelný od y otevřenou množinou. Relace $x \sqsubseteq y$ je jistě reflexivní a transitivní. Slabá antisymetrie je právě T_0 vlastnost prostoru X.

Na druhou stranu, každé částečné uspořádání $(X, \sqsubseteq)$ určuje na X *topologii horních podmnožin*, ve které jsou otevřené právě množiny $U \subseteq X$ splňující: je-li $x \in U$ a $x \sqsubseteq y$, je také $y \in U$. Předně, takový systém je vskutku topologie na X. Je zřejmě T_0, neboť každá množina tvaru $\{x \in X; x \not\sqsubseteq y\}$ je horní, tj. otevřená.

3.1.8 Cvičení. Právě zavedená topologie je T_1 právě tehdy, když je diskrétní, což je právě tehdy, když uspořádání $(X, \sqsubseteq)$ je triviální.

3.1.9 Cvičení. Net $\{x_i; i \in (I, \leq)\}$ v T_0 prostoru $(X, \sqsubseteq)$ je *monotónní*, pokud pro $i \leq j$ je $x_i \sqsubseteq x_j$. Jinými slovy, pokud $x : (I, \leq) \to (X, \sqsubseteq)$ je monotónní zobrazení. (a) Monotónní net $\{x_i; i \in (I, \leq)\}$ konverguje ke každému x_i. (b) Pokud monotónní net $\{x_i; i \in (I, \leq)\}$ konverguje k bodu $y \in X$, který je majorantou všech x_i, pak je y je nutně supremem $\bigsqcup x_i$ množiny $\{x_i; i \in I\}$.

Obecně nemusí být supremum usměrněné množiny $I \subseteq (X, \sqsubseteq)$ její limitou v topologii horních podmnožin. Například v úplném svazu $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ tvoří konečné množiny $A \subseteq \mathbb{N}$ usměrněný systém, jehož supremem (sjednocením) je množina $\mathbb{N}$. Není však topologickou limitou, je dokonce isolovaným bodem: jednoprvková množina $\{\mathbb{N}\}$ je horní a odděluje $\mathbb{N}$ od všech konečných podmnožin.

Dodatečná podmínka, která zajistí, aby supremum usměrněné množiny bylo vždy její limitou, vede na následující zeslabení topologie horních podmnožin.

3.1.10 Definice. Buď $(X, \sqsubseteq)$ částečně uspořádaná množina. Potom *Scottova topologie* na X sestává z takových množin $U \subseteq X$, které splňují: (i) U je horní (ii) kdykoli má usměrněná množina $M \subseteq X$ supremum $\bigsqcup M \in U$, je $U \cap M \neq \emptyset$.

3.1.11 Cvičení. Scottova topologie je vskutku topologie na $(X, \sqsubseteq)$. Je obecně slabší než topologie horních podmnožin, ale je stále T_0. Je T_1 jen v případě, kdy $(X, \sqsubseteq)$ je triviální uspořádání, a v tom případě je již diskrétní. Monotónní net $\{x_i \in X; i \in I\}$ se supremem $\bigsqcup x_i$ v $(X, \sqsubseteq)$ konverguje právě k bodům $y \sqsubseteq \bigsqcup x_i$.

3.1.3 Spojité svazy

Zajímáme se především o taková uspořádání, ve kterých suprema podmnožin existují, tedy o úplné svazy. Připomeňme, že úplný svaz má nutně nejmenší a největší prvek, které budeme značit $\perp$ (bottom) a $\top$ (top). V intencích naší představy datového typu jakožto aproximací ideálních hodnot je pak nejmenší prvek nejhorší možnou aproximací. Nějaký takový prvek se v mnoha typech přirozeně vyskytuje.

Spojité svazy definujeme pomocí následující relace. Je-li $(D, \sqsubseteq)$ úplný svaz, položme $x \prec y$ právě když y leží ve vnitřku[2] množiny $\{z \in D; x \sqsubseteq z\}$.

3.1.12 Definice. Úplný svaz $(D, \sqsubseteq)$ je *spojitý svaz*, pokud pro každé $y \in D$ je

$$y = \bigsqcup \{x \in D; x \prec y\}\,.$$

Spojité svazy použijeme jako modely datových typů. Předveme několik základních příkladů a ukážeme, že spojité svazy jsou právě injektivní prostory.

3.1.13 Příklad. Sierpinskiho prostor $\mathcal{S} = \{\perp, \top\}$ je se svým uspořádáním $\perp \sqsubseteq \top$ spojitým svazem. Zřejmě poslouží jako model tradičního typu `BOOLEAN`.

3.1.14 Cvičení. V konečném svazu je každá horní množina Scottovsky otevřená, takže $x \prec y$ právě když $x \sqsubseteq y$. Konečný svaz je tedy spojitý.

3.1.15 Příklad. Popíšeme datový typ `INT` sloužící k zachycení přirozených čísel. Je to nejjednodušší možný (nekonečný) typ: nosnou množinou uspořádání je množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel, a uspořádané dvojice jsou jen $x \sqsubseteq x$ pro $x \in \mathbb{N}$; jedná se tedy o diskrétní uspořádání. K němu přidáváme ještě nejmenší prvek $\perp$ a největší prvek $\top$.

[2] Rozumí se ve smyslu Scottovy topologie na D.

3.1.16 Příklad. Popíšeme Scottovu topologii na datovém typu `INT` zavedeném výše. Prázdná množina a celý typ `INT` jsou otevřenými množinami. Zároveň každá jednobodová množina $\{n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ je otevřená: totiž (1) je horní, a (2) je-li $X \subseteq$ `INT` nějaká usměrněná množina, pro kterou platí $\bigsqcup X \in \{n\}$, je nutně $\{n\} \subseteq X \subseteq \{n, \perp\}$. Specielně tedy $n \in X \cap \{n\} \neq \emptyset$. Tedy diskrétní uspořádání indukuje diskrétní topologii.

3.1.17 Příklad. Datový typ `REAL` slouží k zachycení reálných čísel. Jeho prvky jsou uzavřené intervaly $[a, b]$ pro $a \leq b \in \mathbb{R}$ uspořádané opačnou inkluzí, tj. $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$ právě tehdy, když $[a, b] \supseteq [c, d]$, což je právě tehdy, když $a \leq c \leq d \leq b$. Takové uspořádání odpovídá naší představě, že podinterval nese „více informace“ o reálném čísle, totiž lépe jej aproximuje. Samotný „interval“ $\mathbb{R}$ hraje roli nejmenšího prvku.

Předně, jedná se vskutku o částečné uspořádání. Zřejmě maximálními prvky jsou právě sama „ideální“ reálná čísla $a \in \mathbb{R}$, respektive jednobodové intervaly $[a, a] = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$. To opět odpovídá představě, že maximální prvky nesou nejvíce informace o tom kterém reálném čísle, jsou jeho nejlepší aproximací.[3]

Ukážeme, že toto uspořádání je direktně úplné. Buď totiž $X \subseteq$ `REAL` nějaká usměrněná množina, tedy pro každé dva intervaly $[a, b], [c, d] \in X$ existuje nějaký interval $[e, f] \in X$ takový, že $[a, b] \cap [c, d] \supseteq [e, f]$. Z toho ihned plyne indukcí, že každých konečně mnoho intervalů $I_1, \ldots, I_k \in X$ má neprázdný průnik: jsou-li $I_1, I_2, I_3 \in X$, pak $I_1 \cap I_2$ obsahuje nějaké $I \in X$; průnik $I \cap I_3$ pak opět obsahuje nějaké $J \in X$; tedy i průnik $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \supseteq J \neq \emptyset$ je neprázdný, atd. Usměrněná množina $X \subseteq$ `REAL` tedy tvoří centrovaný systém uzavřený intervalů. Z kompaktnosti libovolného $[a, b] \in X$ tedy podle věty 2.6.5 máme, že celý průnik $\bigcap X$ je neprázdný. Přitom neprázdný průnik systému uzavřených intervalů je opět uzavřený interval, tedy prvek z `REAL`. Zbývá nahlédnout, že průnik $\bigcap X$ je právě supremem usměrněné množiny X vůči $\sqsubseteq$.

3.1.18 Příklad. $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ je spojitý svaz. Pro každou $x \subseteq \mathbb{N}$ je množina $\{y \subseteq \mathbb{N}; x \subseteq y\}$ horní; otevřená je právě tehdy, když je $x \subseteq \mathbb{N}$ konečná. Systém množin s konečným doplňkem tvoří horní množinu, která není otevřená. Pro $x, y \subseteq \mathbb{N}$ je $x \prec y$ právě tehdy, když $x \subseteq y$ a x je konečná.

3.1.19 Lemma. *Úplný svaz $(D, \sqsubseteq)$ je spojitý právě když pro každé $y \in D$ je*

$$y = \bigsqcup \{\sqcap U; U \textit{ je otevřená a } y \in U\}.$$

3.2 Procedury

Popsali jsme datové typy v denotační sémantice. Nyní popíšeme zobrazení mezi nimi, která budou modelovat *procedury*. Vycházíme z přirozené představy, že procedura dostává na vstupu prvky nějakého datového typu, a na výstupu vrací prvky nějakého (třeba jiného) datového typu.

3.2.1 Definice. *Procedura* je zobrazení $f : (D, \sqsubseteq) \to (D', \sqsubseteq')$ mezi dvěma datovými typy, které je *spojité* v tom smyslu, že *zachovává suprema* usměrněných podmnožin, tj. pro každou usměrněnou $X \subseteq D$ splňuje

$$f(\bigsqcup_D X) = \bigsqcup_{D'} f[X]$$

[3] Předchozí typ `INT` sestává jen z takových ideálních prvků, navzájem neporovnatelných.

Pro úplnost jsme přidali indexy ke znakům $\bigsqcup$ pro supremum, abychom výslovně označili, zda se jedná o supremum v tom či onom svazu. V dalším ale budeme tyto indexy vypouštět, pakliže nebude pochyb, ve kterém uspořádání se zrovna nacházíme.

Tak jako datové typy sestávají z aproximací nějakých „ideálních" matematických objektů, jsou spojitá zobrazení mezi datovými typy vhodnou aproximací „skutečných" zobrazení mezi těmito matematickými objekty. Zavedli jsme například datový typ `REAL` jakožto model pro reálná čísla, lépe či hůře aproximovaná uzavřenými intervaly. Je potom přirozené považovat (jak výše činíme) zobrazení z `REAL` do `REAL` za aproximace „skutečných" reálných funkcí: víme-li, že zobrazení $f : \mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}$ zobrazuje řekněme $[0,1]$ do $[4,7]$, aproximujeme tím *nějakou* reálnou funkci, která na hodnotě z $[0,1]$ nabývá nějakou hodnotu z $[4,7]$. Pokud potom nějaká $g : \mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}$ zobrazuje $[0,1]$ do $[5,6]$, je to v dobrém smyslu „lepší" aproximace. O tom podrobněji níže.

3.2.2 Lemma. *Spojité zobrazení $f : (D, \sqsubseteq) \to (D', \sqsubseteq')$ je monotónní.*

Důkaz. Buď $f : D \to D'$ spojité, buďte $x \sqsubseteq y \in D$. Pak $X = \{x, y\} \subseteq D$ je usměrněná podmnožina v D se supremem $\bigsqcup X = y$, takže ze spojitosti je $f(y) = f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f[X] = \bigsqcup\{f(x), f(y)\}$. Tedy $f(x) \sqsubseteq' f(y)$ v $(D', \sqsubseteq')$. □

3.2.3 Cvičení. (a) Zobrazení mezi konečnými svazy je spojité, právě když je monotónní. (b) Popište explicitně všechna spojitá zobrazení svazu $\mathcal{S}$ do sebe.

3.2.4 Příklad. Zobrazení f ze spojitého svazu $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ do sebe je spojité právě tehdy, když je *konečného charakteru*, tj. když pro každou $a \subseteq \mathbb{N}$ je

$$f(a) = \bigcup \{f(x); x \subseteq a \text{ konečná}\}.$$

3.2.5 Cvičení. Popište nějaká dvě nekonečná direktně úplná uspořádání a nějaké monotónní zobrazení mezi nimi, které *není* spojité. Tím bude ukázáno, že požadavek na spojitost je ostře silnější než monotonie.

3.2.6 Lemma. *Funkce $f : (D, \sqsubseteq) \to (D', \sqsubseteq')$ je topologicky spojitá právě tehdy, když zachovává suprema usměrněných množin.*

Tedy pojem spojitosti zavedený výše není nic jiného, než topologická spojitost (vůči Scott topology). To je také ospravedlněním názvu. Budeme hovořit o *spojitých* zobrazeních mezi datovými typy, aniž bychom oba pojmy rozlišovali.

Důkaz. Buď $f : D \to D'$ topologicky spojité zobrazení mezi dvěma datovými typy, tj. spojité vůči jejich Scottovým topologiím. Chceme ukázat, že pro každou usměrněnou množinu $X \subseteq D$ je $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f[X]$. Buď tedy $X \subseteq D$ usměrněná. Pak $\{x; x \in (X, \sqsubseteq)\}$ je net v D (usměrněná množina X indexuje sama sebe jakožto net). Ukážeme, že tento net topologicky konverguje, a $\bigsqcup X$ je jeho limitou. Buď totiž $U \subseteq D$ nějaké otevřené okolí bodu $\bigsqcup X \in D$. Pak existuje nějaké $x_0 \in X \cap U$. Zároveň je $\{y \in X; x_0 \sqsubseteq y\} \subseteq U$, neboť U je horní množina. To ale znamená, že net $\{x; x \in (X, \sqsubseteq)\}$ od jistého indexu počínaje (nejpozději od x_0) leží v daném okolí U; tedy konverguje k $\bigsqcup X$. Je-li nyní f topologicky spojitá, musí zachovat tuto konvergenci netu podle 2.4.2, což ale znamená právě tolik, že $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f[X]$.

V opačném směru buď naopak $f : D \to D'$ zobrazení, které zachovává suprema usměrněných množin; ukážeme, že je topologicky spojité. Buď $U' \subseteq D'$ otevřená. Podle předchozího lemmatu je f nutně monotónní, takže $U = f^{-1}[U']$ je horní množina. Je-li $X \subseteq D$ usměrněná a $\bigsqcup X \in U$, máme $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f[X] \in U'$, takže $f(x_0) \in U'$ pro nějaké $x_0 \in X$, neboli $x_0 \in X \cap U$. Ukázali jsme, že vzor otevřené mnžiny je otevřená množina. □

3.2.7 Příklad. Se zavedením spojitých zobrazení z `REAL` do `REAL` je přirozené se ptát, jaká je souvislost takových zobrazení se spojitými realnými funkcemi, tak jak se zkoumají v reálné analýze. Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nějaká spojitá reálná funkce, existuje nějaká přirozená representace tohoto objektu v naší sémantice, to jest nějaké spojité zobrazení z `REAL` do `REAL`, které bude nějakým přirozeným způsobem korespondovat s funkcí f, nejlépe jednoznačně?

Nabízí se zobrazení f^*, které každému uzavřenému intervalu $[a, b] \in$ `REAL` přiřadí jeho obraz $f[[a, b]]$ při funkci f. To je opět nějaký uzavřený interval, neboť spojitý obraz uzavřeného intervalu je opět uzavřený interval. Tedy f^* vede z `REAL` do `REAL`, a zřejmě je monotónní: menší interval má menší obraz, tj. v našem uspořádání větší prvek je zobrazen na větší prvek. To odpovídá naší představě, že spojitá funkce na „přesnějším“ vstupu dává „přesnější“ výstup. V krajním případě, na maximálních prvcích $\{a\} = [a, a] \in$ `REAL` dostáváme prostě $f(a) \in \mathbb{R}$, respektive jednobodový interval $\{f(a)\} \in$ `REAL`. Zároveň $\mathbb{R}$ přechází na nejmenší prvek obrazu a $\top = \emptyset$ na největší prvek $\top = \emptyset$.

Nahradili jsme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónním zobrazením $f^* :$ `REAL` $\to$ `REAL`. Ukážeme, že je spojité. Podle 3.2.6 máme ověřit, že f^* zachovává suprema usměrněných množin v `REAL`. Buď tedy nějaký uzavřený interval $I \in$ `REAL` supremem usměrněné množiny $X \subseteq$ `REAL`. Víme již, co taková situace znamená: I je právě průnikem centrovaného systému X. Máme ukázat, že f^* toto supremum zachová, tedy že $f^*(I) = f[I]$ bude opět supremem usměrněné množiny $f^*[X]$, neboli že $f[I] = \bigcap\{f[J]; J \in X\}$. Jinými slovy, máme ukázat, že f^* zachovává průniky centrovaných systémů.[4]

Inkluze $f[I] \subseteq \bigcap\{f[J]; J \in X\}$ platí vždy. Buď naopak $y \in \bigcap_{J\in X} f[J]$. To znamená, že v každém intervalu $J \in X$ existuje nějaké $x_J \in J$ takové, že $f(x_J) = y$. Tyto body tvoří net $\{x_J; J \in X\}$ v $\mathbb{R}$, indexovaný usměrněným uspořádáním $(X, \supseteq)$. Pro libovolné $J_0 \in X$ je $\{x_J; J \in X, J \subseteq J_0\}$ net v kompaktním prostoru J, a tedy má nějaký subnet, který konverguje k nějakému bodu $x \in \mathbb{R}$. Ze spojitosti funkce f je potom $f(x) = y$. Snadno se přitom nahlédne, že $x \in I$: každé okolí bodu x protíná každou $J \in X$ (od jistého indexu počínaje), a tedy protíná i jejich průnik I. Tedy $x \in \overline{I} = I$. Tedy máme $y \in f[I]$ a platí $\bigcap\{f[J]; J \in X\} \subseteq f[I]$. Tedy f^* je spojité zobrazení.

V opačném směru se ptáme, zda každé (spojité) zobrazení z `REAL` do `REAL` určuje nějakou (spojitou) reálnou funkci. Ihned ale vidíme, že nikoli. Například zobrazení, které každému prvku $[a, b] \in$ `REAL` přiřazuje nejmenší prvek $\bot = \mathbb{R}$, je konstantní, tedy jistě spojité, ale nenese žádnou informaci o hodnotách nějaké reálné funkce. Je to vlastně nejhorší možná aproximace vůbec: říká jen, že na intervalu $[a, b]$ budou hodnotami *nějaká* reálná čísla. Má-li zobrazení $g :$ `REAL` $\to$ `REAL` určovat nějakou reálnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, musí splňovat nějakou dodatečnou podmínku.

[4] Jedná se o jedinou netriviální podmínku tohoto typu. Totiž vzor každého sjednocení je sjednocením vzorů apod. — jedině obraz průniku není obecně průnikem obrazů.

Není ale obtížné takovou podmínku isolovat: potřebujeme, aby na singletonech $\{x\}$, tedy maximálních prvcích $[x, x]$ svazu `REAL`, dávala g opět maximální hodnoty $g(\{x\}) = \{y\}$. Pak je přirozené předepsat $f(x) = y$. Zbývá ověřit, že je-li $g : \mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}$ spojitá, pak také f je spojitá. To přenecháváme čtenáři.

3.2.8 Cvičení. Ukažte, že pokud $g : \mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}$ je spojitá, ale nesplňuje maximální podmínku uvedenou v předchozím příkladu, pak existují přinejmenším dvě spojité reálné funkce, které jsou konzistentní s aproximací g.

3.2.9 Cvičení. Ukázali jsme výše, že spojité reálné funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odpovídá jisté spojité zobrazení na úplném svazu `REAL`. Víme, že každé takové zobrazení má pevné body. Například každý pevný bod $a = f(a)$ funkce f je také pevným bodem odpovídajícího zobazení, mohou však existovat i jiné.

Popište nejmenší, největší, či všechny pevné body odpovídajícího zobrazení buďto obecně, nebo alespoň pro nějaké význačné reálné funkce. Například pro spojitou funkci $f(x) = x^2$ jsou pevnými body právě intervaly $\mathbb{R} = f[\mathbb{R}]$, $[0, 1] = f[0, 1]$, $\{0\} = f[\{0\}]$, $\{1\} = f[\{1\}]$ a $\emptyset = f[\emptyset]$. Ty tvoří (konečný) úplný svaz.

3.3 Složené typy

Popsali jsme zatím jen datové typy vhodné pro modelování přirozených a reálných čísel. S tím samozřejmě nemůžeme vystačit, chceme modelovat i další tradiční konstrukce programovacích jazyků, jako jsou struktury (`struct`), uniony, stringy, seznamy apod.

V této sekci popíšeme právě tyto *složené typy*. Zvláštní postavení mezi nimi zaujímají datové typy sestávající z procedur, které umožňují modelovat v budované sémantice neomezenou rekurzi.

3.3.1 Produkty

3.3.1 Definice. Jsou-li $(D_1, \sqsubseteq_1)$ a $(D_2, \sqsubseteq_2)$ datové typy, pak jejich *produktem* je součinové uspořádání $(D_1 \times D_2, \sqsubseteq_1 \times \sqsubseteq_2)$.

Produkt datových typů je přirozený způsob, jak modelovat konstrukce známé např. jazyce `C` jako `struct { int n; real x; }`. Je samozřejmě potřeba ověřit, že produkt je opět datovým typem.

3.3.2 Věta. *Jsou-li D_1 a D_2 datové typy, pak $D_1 \times D_2$ je opět datový typ, a Scottova topologie na $D_1 \times D_2$ je právě topologie kartézského součinu.*

Důkaz. Buď $X \subseteq D_1 \times D_2$ nějaká usměrněná množina. Pak i obě její projekce

$$X_1 = \{x_1 \in D_1; (\exists x_2 \in D_2)(x_1, x_2) \in X\} \subseteq D_1$$

$$X_2 = \{x_2 \in D_2; (\exists x_1 \in D_1)(x_1, x_2) \in X\} \subseteq D_2$$

jsou usměrněnými množinami v jednotlivých datových typech, jak se snadno nahlédne. Tedy existují suprema $\bigsqcup X_1 \in D_1$ a $\bigsqcup X_2 \in D_2$. Zbývá si uvědomit, že $(\bigsqcup X_1, \bigsqcup X_2) \in D_1 \times D_2$ je supremem množiny X v uspořádání $\sqsubseteq_1 \times \sqsubseteq_2$. Mohli bychom stručně říci, že jsme důkaz provedli po složkách. $\square$

Analogickou úvahu lze nyní provést pro součin tří, čtyř, každých konečně mnoha, ba i nekonečně mnoha datových typů.[5] Speciálně pro jeden pevný datový typ $(D, \sqsubseteq)$ můžeme dvojice, trojice, atd. prvků z D modelovat datovými typy $D^2 = D \times D$, $D^3 = D \times D \times D$, atd. Suma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D^n$ (viz níže) je potom vhodným datovým typem pro zachycení všech konečných posloupností prvků z D, a mocnina $D^{\mathbb{N}}$ je vhodným typem pro zachycení posloupností prvků z D. Například proměnné typu $\mathtt{REAL}^{\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

3.3.3 Cvičení. Popište všechna spojitá zobrazení svazu $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ do sebe.

3.3.4 Cvičení. Ověřte, že „sčítání“, zavedené jako zobrazení z $\mathtt{REAL} \times \mathtt{REAL}$ do `REAL` předpisem $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$, je spojité.

3.3.2 Sumy

3.3.5 Definice. Jsou-li $(D_1, \sqsubseteq_1)$ a $(D_2, \sqsubseteq_2)$ datové typy, pak jejich *sumou* je disjunktní sjednocení $D_1 \cup D_2$ s uspořádáním $\sqsubseteq_1 \cup \sqsubseteq_2$, ve kterém nejmenší prvky $\perp_1$ a $\perp_2$ identifikujeme do jediného $\perp$. Tedy uspořádanými dvojicemi v sumě jsou jen dvojice $x_1 \sqsubseteq y_1$ z D_1 a a $x_2 \sqsubseteq y_2$ z D_2; prvky $x_1 \in D_1$ a $x_2 \in D_2$ jsou navzájem neporovnatelné.

Suma $D_1 \cup D_2$ datových typů je přirozený způsob jak modelovat konstrukce známé v jazyce `C` jako `union { int n; real x; }`. Proměnné takového typu nabývají buďto hodnot z D_1 nebo z D_2. Všimněme si, jak denotační sémantika opět abstrahuje od implementačních detailů, jako *alignment* různých velikostí apod, které jsou z tohoto pohledu podružné.

3.3.6 Věta. *Jsou-li D_1 a D_2 datové typy, pak $D_1 \cup D_2$ je opět datový typ, a Scottova topologie na typu $D_1 \cup D_2$ je právě topologie disjunktní sumy.*

3.3.3 Typy funkcí

Nejzajímavější z konstrukcí, vytvářejících nové datové typy ze stávajících, jsou datové typy tvořené spojitými funkcemi. V našem dosavadním chápání datových typů jako úplných svazů a procedur jako spojitých funkcí mezi nimi to znamená, že samy tyto funkce tvoří datový typ. To je velmi žádoucí: ve „vyšších“ jazycích je běžné, že nějaká funkce bere funkci jako argument a vrací funkci jako hodnotu.

3.3.7 Definice. Pro datové typy D a E buď $[D \to E]$ datový typ, jehož prvky jsou právě všechny spojité funkce z D do E, s uspořádáním po složkách, tj. pro $f, g \in [D \to E]$ je $f \sqsubseteq g$ právě tehdy, když $f(x) \sqsubseteq_E g(x)$ pro každé $x \in X$.

Takové uspořádání odpovídá naší představě o aproximaci: zobrazení, které dává všude „lepší aproximace“ je samo „lepší aproximací“ mezi funkcemi.

3.3.8 Věta. *Jsou-li D a E datové typy, pak datový typ $[D \to E]$ je opět direktně usměrněný a má právě topologii podprostoru E^D.*

Důkaz. Předně, $[D \to E]$ je uspořádání, jak se snadno ověří. Ukážeme, že je diraktně úplné. Buď tedy $\mathcal{F} \subseteq [D \to E]$ nějaká usměrněná množina. Pak pro každé $x \in D$ je množina $\mathcal{F}[x] = \{f(x); f \in \mathcal{F}\}$ usměrněná v E: jsou-li

[5] Na argumentu „po složkách“ se tím nic nemění.

$f(x), g(x) \in \mathcal{F}[x]$, existuje nějaká $h \in \mathcal{F}$ tak, že $f, g \sqsubseteq h$, neboť $\mathcal{F}$ je usměrněná, tedy je také $f(x), g(x) \sqsubseteq h(x)$. Tedy $\mathcal{F}[x]$ má supremum $\bigsqcup \mathcal{F}[x] \in E$.

Položme tedy $F(x) = \bigsqcup \mathcal{F}[x]$ pro každé $x \in D$; pak F je funkce z D do E, zřejmě je monotónní, a majorizuje každou funkci $f \in \mathcal{F}$. Navíc v každém bodě $x \in D$ nabývá hodnotu, která je supremem všech hodnot $f(x)$ pro $f \in \mathcal{F}$. K tomu, aby byla F supremem množiny $\mathcal{F}$, zbývá ukázat, že je F spojitá, tedy že je vůbec prvkem $[D \to E]$. Ověříme, že F zachovává suprema.

Buď tedy $X \subseteq D$ nějaká usměrněná množina se supremem $\bigsqcup X \in D$. Množina $F[X] \subseteq E$ je usměrněná, neboť F je monotónní. Máme ukázat, že $F(\bigsqcup X)$ je supremem $F[X]$. Jistě je majorantou; ukážeme, že je nejmenší mezi všemi majorantami. Buď totiž $z \in E$ nějaká jiná majoranta množiny $F[X] \subseteq E$, to jest $z \geq F(x) = \bigsqcup\{f(x); f \in \mathcal{F}\}$ pro každé $x \in D$. Tedy pro každé $x \in X$ a každé $f \in \mathcal{F}$ je $f(x) \sqsubseteq z$. Tedy pro každé $f \in \mathcal{F}$ je z majorantou množiny $f[X]$, a tedy $z \geq \bigsqcup f[X] = f(\bigsqcup X)$ — právě použitá rovnost platí díky tomu, že $f \in \mathcal{F}$ jsou spojité. Tedy máme $z \geq \bigsqcup\{f(\bigsqcup X); f \in \mathcal{F}\} = F(\bigsqcup X)$. Tedy $F(\bigsqcup X) = \bigsqcup F[X]$ a F je spojitá.[6] $\square$

3.3.9 Cvičení. Popište všechna spojitá zobrazení svazu $[\mathcal{S} \to \mathcal{S}]$ do sebe. Ukažte, že pro konečné lineární uspořádání $(D, \sqsubseteq)$ je $[D \to D]$ opět lineární.

3.3.10 Příklad. V příkladě 3.2.7 jsme vlastně popsali souvislost mezi množinou $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ reálných funkcí a svazem $[\mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}]$. Všimněme si, že „nejhorší možná aproximace“, tedy zobrazení s konstantní hodnotou $\perp$, je vskutku nejmenším prvkem tohoto svazu. Naopak zobrazení $f^* : \mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}$ odpovídající reálným funkcím $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou právě maximální prvky v $[\mathtt{REAL} \to \mathtt{REAL}]$.

3.3.4 Inverzní limity

Hlavním cílem tohoto oddílu je dokázat Scottovu větu [S2], podle které lze každý T_0 prostor vnořit do spojitého svazu, který je svazově isomorfní a topologicky homeomorfní se svým vlastním svazem funkcí.

[6] Pečlivý čtenář může u znaků $\bigsqcup$ doplnit patřičné indexy $\bigsqcup_D$ resp. $\bigsqcup_E$, které jsme pro čitelnost vynechávali, přestože na různých místech znamenají supremum v tom či onom svazu.

Kapitola 4

Teorie kategorií

V této kapitole popíšeme základy teorie kategorií. Měli bychom čtenáře hned zkraje upozornit, že se jedná o velmi abstraktní pohled na matematiku jako celek. Budeme se však zajímat hlavně o aplikace v informatice.

Zatímco jednotlivé matematické obory studují *objekty* svého zájmu (topologické prostory, grupy, svazy jako datové typy, vektorové prostory) a nějakou přirozenou třídu *morfismů* mezi nimi (spojitá zobrazení, homomorfismy, datové procedury, lineární zobrazení), teorie kategorií studuje obecně *kategorie*, totiž třídy objektů spolu s nějakou třídou morfismů — brzy podáme přesnou definici. To je dosti abstraktní pohled; mnohdy se ale taková abstrakce nabízí, jak ilustrujeme níže na příkladě produktu. Poznatky získané obecně o kategoriích pak zároveň mají rozličné aplikace. V některých oborech, jako například v sémantice jazyků, se teorie kategorií postupně stala či stává standardním jazykem.

4.1 Univerzalita produktu

Začneme příkladem toho, jak teorie kategorií sjednocuje konstrukce používané v různých odvětvích matematiky. V oddílu 2.9 jsme popsali produktovou topologii a dokázali jsme, že produkt ΠX_i spolu s projekcemi $\pi_i : \Pi X_i \to X_i$ má následující vlastnost: zobrazení $f : X \to \Pi X_i$ z nějakého prostoru X do produktu je spojité právě tehdy, když je spojité jeho složení $\pi_i \circ f$ s libovolnou projekcí. Z toho plyne následující extremální vlastnost topologického produktu.

4.1.1 Lemma. *Pro topologické prostory X_i a spojitá zobrazení $f_i : X \to X_i$ existuje jediné spojité $f : X \to \Pi X_i$ takové, že pro každé $i \in I$ je $f_i = \pi_i \circ f$.*

Říkáme potom, že zobrazení f *faktorizuje* zobrazení $f_i : X \to X_i$. Smysl věty je tento: topologický produkt ΠX_i spolu se svými projekcemi $\pi_i : \Pi X_i \to X_i$ do jednotlivých X_i je nejlepší mezi všemi takovými prostory. Každý jiný prostor X se svými $f_i : X \to X_i$ se faktorizuje přes něj, a to jediným způsobem.

Důkaz. Stačí položit $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. Potom je $f : X \to \Pi X_i$, pro každé $i \in I$ a každé $x \in X$ je $(\pi_i \circ f)(x) = \pi_i(f(x)) = f_i(x)$, takže $\pi_i \circ f = f_i$, a podle výše zmíněné věty je zobrazení f spojité. Zbývá ukázat, že je jediné takové. Buď tedy $g : X \to \Pi X_i$ nějaké spojité zobrazení splňující $\pi_i \circ g = f_i$ pro každé $i \in I$. Potom ale pro každé $x \in X$ je $\pi_i(g(x)) = f_i(x) = \pi_i(f(x))$, takže prvky $f(x), g(x) \in \Pi X_i$ se shodují v každé složce, neboli $f(x) = g(x)$; tedy $f = g$. □

Všimněme si, že tato situace není specifická pro topologické prostory a spojitá zobrazení. Analogicky se dokáží následující tvrzení o produktech grup, vektorových prostorů či uspořádaných množin (s operacemi/relacemi po složkách).

4.1.2 Cvičení. Pro grupy X_i a homomorfismy $f_i : X \to X_i$ existuje jediný homomorfismus $f : X \to \Pi X_i$ takový, že pro každé $i \in I$ je $f_i = \pi_i \circ f$.

4.1.3 Cvičení. Pro uspořádané množiny X_i a monotónní $f_i : X \to X_i$ existuje jediné monotónní $f : X \to \Pi X_i$ takové, že pro každé $i \in I$ je $f_i = \pi_i \circ f$.

4.1.4 Cvičení. Pro vektorové prostory X_i nad T a lineární $f_i : X \to X_i$ existuje jediné lineární $f : X \to \Pi X_i$ takové, že pro každé $i \in I$ je $f_i = \pi_i \circ f$.

Zdá se tedy, že pojem *produktu* lze definovat obecně, totiž právě pomocí výše popsané univerzální vlastnosti, bez ohledu na to, o kterou třídu objektů a zobrazení se jedná. Takový *produkt* totiž může být nejvýše jeden (až na isomorfismus), což opět dokážeme jen v případě topologických prostorů.

4.1.5 Lemma. *Má-li topologický prostor X spolu se spojitými $f_i : X \to X_i$ univerzální faktorizační vlastnost popsanou výše, pak je homeomorfní s ΠX_i.*

Důkaz. Víme, že všechny f_i se faktorizují přes jedinečné spojité $f : X \to \Pi X_i$ jako $f_i = \pi_i \circ f$. Jelikož má ale prostor X spolu se zobrazeními f_i tutéž univerzální vlastnost, faktorizují se také všechny projekce π_i jako $\pi_i = f_i \circ g$ pro nějaké jednoznačně určené spojité faktorizační zobrazení $g : \Pi X_i \to X$. Zbývá ukázat, že f a g jsou navzájem inverzní homeomorfismy. Přitom pro každé $i \in I$ je $\pi_i = f_i \circ g = (\pi_i \circ f) \circ g = \pi_i \circ (f \circ g)$. To ale znamená, že $f \circ g$ je identita na ΠX_i, protože pro každé $(x_i)_{i \in I} \in \Pi X_i$ je $\pi_i((x_i)_{i \in I}) = x_i = \pi_i(f(g((x_i)_{i \in I})))$, a podobně se ukáže, že $g \circ f$ je identita na X. Tedy zobrazení f, g jsou bijekce spojité oběma směry, totiž navzájem inverzní homeomorfismy. □

Pokud vymezené objekty a morfismy splňují určité náležitosti (v důkazech například využíváme asociativity skládání), můžeme produkt definovat takto: produktem objektů X_i je takový objekt X spolu s morfismy $f_i : X \to X_i$, že každý jiný objekt Y s morfismy $g_i : Y \to X_i$ se přes něj jednoznačně faktorizuje.

Ukážeme postupně, že podobně lze zobecnit mnohé z dalších všudypřítomných pojmů týkajících se matematických objektů a morfismů (podstruktury, sumy, vnoření, isomorfismy, ...) a dokázat o nich netriviální obecná tvrzení.

4.2 Objekty a morfismy

4.2.1 Definice. *Kategorie* $\mathcal{C}$ sestává z třídy *objektů* $Obj(\mathcal{C})$ a třídy *morfismů* $Mor(\mathcal{C})$. Pro objekty X, Y je dána množina morfismů $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq Mor(\mathcal{C})$. Pro objekty X, Y, Z je dána operace $\circ$ *skládání* morfismů tak, že pro $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ je $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$. Skládání je asociativní, tj. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, a pro objekt X existuje morfismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ splňující $f \circ 1_X = f$ pro každé $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $1_X \circ g = g$ pro každé $g \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Morfismům říkáme též *šipky* a píšeme $f : X \to Y$ místo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Pokud nehrozí nedorozumění, píšeme stručněji $X \in \mathcal{C}$ místo $X \in Obj(\mathcal{C})$. Neutrální morfismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ nazýváme *identita* na X.

4.2.2 Příklad. Každá z následujících tříd tvoří kategorii. Uvádíme postupně název resp. značení kategorie, její objekty, a její morfismy. Skládáním je ve všech případech obyčejné skládání zobrazení, identitou na každém objektu je identické zobrazení do sebe.

`Set`	množiny	zobrazení
`Lat`	svazy	monotónní zobrazení
`Grp`	grupy	homomorfismy grup
`Gra`	grafy	homomorfismy grafů
`Top`	topologické prostory	spojitá zobrazení
`T2`	Hausdorffovy prostory	spojitá zobrazení
`Cpt`	kompaktní prostory	spojitá zobrazení
`BA`	Booleovy algebry	booleovské homomorfismy
`Ord`	uspořádané množiny	monotónní zobrazení
`Mod(L)`	modely daného jazyka	elementární vnoření
`Mod(T)`	modely dané teorie	elementární vnoření
`Vec(T)`	vektorové prostory	lineární zobrazení

4.2.3 Příklad. Každý monoid $(M, *, 1)$ určuje kategorii M s jediným objektem, a morfismem m za každé $m \in M$. Skládáním je násobení $*$ v monoidu M, jednotkou je $1 \in M$. Díky asociativitě a neutralitě se jedná o kategorii.

4.2.4 Příklad. Každá uspořádaná množina $(X, \leq)$ určuje kategorii. Jejími objekty jsou prvky $x \in X$, mezi každými dvěma objekty vede nanejvýš jeden morfismus, totiž $x \to y$ pokud $x \leq y$; speciálně $x \to x$ je identita na x díky reflexivitě. Díky transitivitě máme pro $x \to y$ a $y \to z$ složení $x \to z$. Třída objektů je v této kategorii množinou; takové kategorie se nazývají *malé*.

4.2.5 Příklad. Každý orientovaný graf (V, E) určuje kategorii: objekty jsou vrcholy $x \in V$, morfismy jsou cesty v grafu, skládání morfismů je řetězení cest. Identity jsou smyčky; vrcholům beze smyček je potřeba smyčku uměle přidat.

4.3 Vlastnosti morfismů

Mnoho přirozených kategorií tvoří množiny opatřené nějakou strukturou. Jako morfismy se pak nabízí taková zobrazení mezi nosnými množinami, která zachovávají tuto strukturu — konvergenci, násobení, uspořádání atd. Tak je tomu v případě topologických prostorů, grup, uspořádání atd. Prozkoumáme nyní morfismy, které splňují nějaké další požadavky.

4.3.1 Definice. Morfismus $h : B \to C$ v kategorii $\mathcal{C}$ je *monomorfismus*, pokud pro každé dva morfismy $f, g : A \to B$ platí: je-li $h \circ f = h \circ g$, je $f = g$.

4.3.2 Definice. Morfismus $h : A \to B$ v kategorii $\mathcal{C}$ je *epimorfismus*, pokud pro každé dva morfismy $f, g : B \to C$ platí: je-li $f \circ h = g \circ h$, je $f = g$.

4.3.3 Cvičení. (a) Monomorfismy v kategorii `Set` jsou právě prostá zobrazení, a epimorfismy jsou právě zobrazení na. (b) Popište monomorfismy a epimorfismy v kategoriích `Lat`, `Grp`, `Gra`, `Top`, `BA`, `Ord`, `Vec`.

4.3.4 Příklad. Epimorfismus v kategorii `T2` Hausdorffových prostorů je právě spojité zobrazení na hustou část; tedy například vnoření $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$ je epimorfismus kategorie `T2` (kdežto v kategorii `Top` epimorfismem není).

Je-li totiž $f : X \to Y$ spojité zobrazení na hustou část $f[X] \subseteq Y$, a pro $g, h : Y \to Z$ platí $g \circ f = h \circ f$, znamená to, že se g a h shodují na husté části. Pro Hausdorrfovy prostory je tedy $g = h$ podle 2.4.4. Pokud naopak $f : X \to Y$ není na hustou část, buď Z faktor Y podle uzavřené množiny $\overline{f[X]}$. To je Hausodrffův prostor podle **??**. Faktorové zobrazení $g : Y \to Z$ a konstantní zobrazení $h : Y \to Z$ se liší, přitom $g \circ f = h \circ f$.

4.4 Limity a kolimity

4.4.1 Definice. Diagram

4.4.2 Definice. Buď $\mathcal{D}$ diagram v kategorii $\mathcal{C}$. Řekneme, že objekt X spolu s morfismy $p_i : X \to D_i$ pro každý objekt D_i diagramu $\mathcal{D}$ je *limita* diagramu $\mathcal{D}$, pokud pro každý morfismus $f : D_i \to D_j$ diagramu $\mathcal{D}$ je $p_j = f \circ p_i$ (stručně: všechny trojúhelníky komutují), a pro každý jiný objekt Y a sadu morfismů $q_i : Y \to D_i$ s touto vlastností existuje právě jeden morfismus $h : Y \to X$ takový, že každé $q_i = p_i \circ h$ (stručně: Y se *faktorizuje* přes X).

Konstrukce popsané v předchozím oddílu jsou speciální případy limit. Například produkt je přímo z definice limitou diskrétního diagramu, a ekvalizér je limitou diagramu $A \rightrightarrows B$.

4.4.3 Věta (Marand)**.** *Kategorie, která má produkty a ekvalizéry, je úplná.*

4.5 Kartézsky uzavřené kategorie

4.6 Funktory

4.7 Přirozené ekvivalence

Literatura

[AJ] S. Abramsky, A. Jung, *Domain Teory*, in *Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 3*,

[AL] A. Asperti, G. Longo, *Categories, Types and Structures*, MIT Press, 1991

[AM] M. A. Arbib, E. G. Manes, *The Categorial Imperative*, Academic Press, 1975

[B] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, 1948

[BA] L. S. Bobrow, M. A. Arbib, *Discrete Mathematics*, Saunders, 1974

[HS] H. Herrlich, G. E. Strecker, *Category Theory*, Allyn and Bacon, 1973

[M] E. G. Manes (ed.), *Category Theory Applied to Computation and Control*, Lecture Notes in Computer Science #25, Springer Verlag, 1975

[ML] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1972

[P] B. C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991

[S1] D. Scott, *Outline of a mathematical theory of computation*, Oxford University Computing Laboratory, Programming Research Group (1970), 169–176

[S2] D. Scott, *Continuous Lattices*, Oxford University Computing Laboratory, Programming Research Group (1971), Technical Monograph 7

[S3] D. Scott, *Data types as lattices*, SIAM J. of Comput. 5:3 (1976), 522–587