2. úkol ze ZDM

25. listopadu 2013

1 Pokyny

Přečtěte si, prosím, tyto pokyny, pozorně až do konce, ať se zbytečně nepřipravíte o body.

Úkoly nejsou povinné. Pokud za ně chcete získat body, přineste je vyřešené v papírové podobě na cvičení v posledním týdnu semestru (pondělí 16. prosince 2013). Pokud by někdo nestíhal úkol přinést v pondělí, budu akceptovat odevzdání na čtvrtečních cvičeních z AAG, ve výjimečných případech na základě přiloženého zdůvodnění přijmu i řešení odeslaná mailem, a to až do půlnoci z neděle 22. na pondělí 23. prosince (i minuta zpoždění znamená 0 bodů). Příklady mohou být psány ručně nebo na počítači. Vybírat se budou na začátku cvičení. Pozdější odevzdání nebude akceptováno, a to včetně pozdních příchodů. Úlohy nemusíte řešit všechny.

Do pravého horního rohu každého papíru (pokud jsou papíry sešité či jinak spojené, stačí pouze na první list), prosím, prosím, prosím, prosím, uveďte čitelně své jméno a jednoznačnou identifikaci skupiny (číslo nebo den a čas začátku).

E-mailem přijímám pouze úlohy ve formátu PDF, PS nebo TXT, nepřijímám zejména DOC a obrázkové formáty. Protože úlohy budu tisknout hromadně, dejte si pozor, ať opět v pravém horním rohu každého papíru je Vaše jméno a číslo skupiny.

U nepodepsaných úloh, ať už zaslaných mailem nebo odevzdaných osobně, nebudu autory dohledávat.

Při hledání řešení úloh můžete pracovat až v trojicích. V tomto případě stačí odevzdat jedno řešení se jmény všech řešitelů. Na cvičení se však namátkově zeptám vybraných studentů na řešení některého z odevzdaných příkladů, pokud nebude znát řešení a bude pod ním podepsaný, má celý tým z celého úkolu 0 bodů (a ztráta pěti bodů už zabolí).

2 Zadání

1. (0,5 bodu) Mějme množinu $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ a množinu $X = A \times A$, dále pak binární relaci $R \subseteq X \times X$ definovanou takto:

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

   (a) Ukažte, že R je ekvivalence na množině X.

   (b) Určete po jednom prvku z každé třídy rozkladu množiny X podle této ekvivalence.

2. (0,5 bodu) Mějme řetězec MISSISSIPPI.

   (a) Kolik existuje trojpísmenných řetězců, které lze z písmen tohoto řetězce sestavit? Povolíme opakování písmen, ale pouze v takovém počtu, v jakém se vyskytují v původním slově (tedy M pouze jednou a P pouze dvakrát).

   (b) Kolik existuje permutací písmen tohoto řetězce (s opakováním), v nichž první nebo poslední (OR nikoliv XOR) nezůstane na svém místě?

K plnému bodovému zisku nestačí uvést číslo, ale i postup, jak jste se k němu dostali.

3. (2 body) Mějme následující rekurentní rovnici:

$$t(n) = 8 \cdot t\left(\frac{n}{2}\right) + n \cdot \log n.$$

Dále předpokládejme, že $t(1) = 1$.

(a) Pomocí mistrovské metody odhadněte řešení této rovnice. (0,5 bodu)

(b) Pomocí matematické indukce dokažte správnost odhadu. (0,5 bod)

(c) Řešení téže rovnice najděte taktéž pomocí iterační metody. (1 bod)

4. (2 body) Mějme následující rekurentní rovnici:

$$f(n) = -3 \cdot f(n-1) + 10 \cdot f(n-2) + 24 \cdot f(n-3),$$

a následující meze:

$$f(0) = 7, f(1) = 8, f(2) = 106.$$

(a) Najděte obecné řešení této rovnice. (0,5 bodu)

(b) Nalezněte řešení rovnice pro stanovené meze. (0,5 bodu)

(c) Pomocí matematické indukce dokažte správnost řešení. Zvolte vhodný typ indukce a s ohledem na tuto volbu vhodně položte indukční předpoklad. (1 bod)