1. úkol ze ZDM

13. října 2013

1 Pokyny

Přečtěte si, prosím, tyto pokyny, pozorně až do konce, ať se zbytečně nepřipravíte o body.

Úkoly nejsou povinné. Pokud za ně chcete získat body, přineste je vyřešené v papírové podobě na cvičení v pátém týdnu semestru (pondělí 21. října 2013) nebo mi je pošlete mailem do půlnoci z neděle na pondělí (i minuta zpoždění znamená 0 bodů). Příklady mohou být psány ručně nebo na počítači. Vybírat se budou na začátku cvičení. Pozdější odevzdání nebude akceptováno, a to včetně pozdních příchodů. Úlohy nemusíte řešit všechny.

Do pravého horního rohu každého papíru (pokud jsou papíry sešité či jinak spojené, stačí pouze na první list), prosím, prosím, prosím, prosím, uveďte čitelně své jméno a jednoznačnou identifikaci skupiny (číslo nebo den a čas začátku).

E-mailem přijímám pouze úlohy ve formátu PDF, PS nebo TXT, nepřijímám zejména DOC a obrázkové formáty. Protože úlohy budu tisknout hromadně, dejte si pozor, ať opět v pravém horním rohu každého papíru je Vaše jméno a číslo skupiny.

U nepodepsaných úloh, ať už zaslaných mailem nebo odevzdaných osobně, nebudu autory dohledávat.

Při hledání řešení úloh můžete pracovat až v trojicích. V tomto případě stačí odevzdat jedno řešení se jmény všech řešitelů. Na cvičení se však namátkově zeptám vybraných studentů na řešení některého z odevzdaných příkladů, pokud nebude znát řešení a bude pod ním podepsaný, má celý tým z celého úkolu 0 bodů (a ztráta pěti bodů už zabolí).

2 Zadání

1. (1 bod) Ukažte, že $n^a \neq O(n^b)$ pro $1 < b < a$.

2. (1 bod) Uvažujme množinu $A \subseteq \mathbb{N}$. Určete, kolik existuje binárních relací $R \subseteq A \times A$, které jsou:

   (a) reflexivní nebo ireflexivní,

   (b) symetrické a antisymetrické.

   Své odpovědi velice pečlivě zdůvodněte.

3. (1 bod) Pomocí matematické indukce dokažte, že potenční množina množiny A, kde $|A| = n$, má 2^n prvků. Co jsou prvky potenční množiny?

4. (1 bod) Pomocí specifikace vlastností (bez použití operátoru and) a výčtem prvků (v případě nekonečných množin stačí vypsat pět nejmenších prvků) popište průniky následujících dvojic množin A a B:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k+1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x = 4k+2\}$,

   (b) $A = \{x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x = k^3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x = k^2\}$,

   (c) $A = \{x \in \mathbb{N}, x^2 < 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^3 < 200\}$,

(d) $A = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ začíná jedničkou}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ má ciferný součet } 3\}$,

5. (1 bod) Mějme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a na ní definovanou binární relaci

$$R = \{(1,1), (4,5), (2,1), (3,1), (5,5), (1,4), (3,3), (2,5), (3,5), (2,2)\}.$$

(a) Rozhodněte a dokažte, zda relace R je uspořádání.

(b) Pokud ne, najděte nejmenší relaci R' takovou, že $R \subseteq R'$ a R' je uspořádání.

(c) Nakreslete Hasseův diagram uspořádání R'.