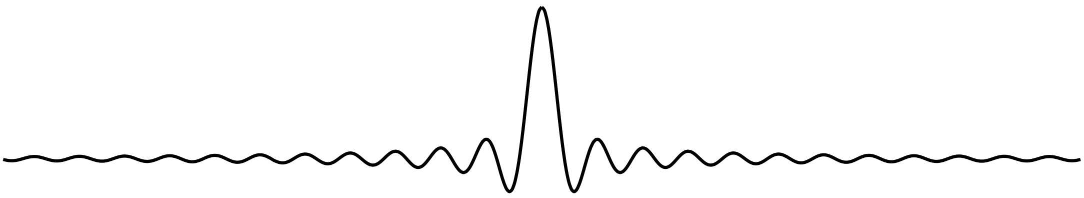
Základy matematické analýzy

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D. Ing. Daniel Vašata, Ph.D.
tomas.kalvoda@fit.cvut.cz daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

Zimní semestr akademického roku 2016/2017

13. ledna 2017



Obsah

Úvod

Tento dokument doplňuje slidy k přednášce předmětu BI-ZMA. Slidy slouží primárně jako doplněk k prezentaci a příliš se nehodí ke studiu či tisku. Slidy zejména neobsahují vysvětlující komentáře přednášejícího a mohou být proto bez těchto podpůrných informací nejasné až matoucí. V tomto textu je uvedeno vše co na slidech, navíc s dalšími dodatečnými informacemi. Na začátku tohoto dokumentu je čtenáři k dispozici seznam používaných symbolů. K zjednodušení hledání ve vytištěném dokumentu je dokument doplněn rejstříkem pojmů.

Tento úvod je dobrým místem na seznámení čtenáře s historií výuky matematické analýzy na FIT. Předmět BI-ZMA (Základ matematické analýzy) byl po zrodu fakulty nejprve vyučován pod vedením prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. (KM FJFI). Poté předmět převzali Ing. Tomáš Kalvoda, PhD. a doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc. V aktuálním semestru je druhým přednášejícím Ing. Daniel Vašata, Ph.D. Tyto poznámky, a pojetí přednášky vůbec, jsou výsledkem tohoto postupného vývoje.

Pro větší přehlednost je předkládaný text členěn do definic, vět, důkazů a příkladů. Definice a věty jsou číslovány průběžně v celém dokumentu. Konec příkladu je označen symbolem $\triangle$. Konec důkazu označujeme symbolem $\square$.

Pokud laskavý čtenář v textu objeví nejasnosti či chyby, nechť je prosím hlásí jednomu z autorů (`tomas.kalvoda@fit.cvut.cz`).

Seznam symbolů

$:=$	definice, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé
$\approx$	přibližné vyjádření na konečný počet desetinných míst
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\forall$	velký (obecný) kvantifikátor
$\exists$	existenční kvantifikátor
$\{a, b, c\}$	množina obsahující prvky a, b a c
$\{x \in M \mid P(x)\}$	množina všech x z M splňující $P(x)$
$x \in M,\ x \notin M$	prvek x náleží/nenáleží množině M
$A \subset B$	A je podmnožinou B (každá množina je podmnožinou sebe sama)
$\emptyset$	prázdná množina
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
$A \times B$	kartézský součin množiny A a B
$\mathcal{P}(A)$	množina všech podmnožin množiny A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty)$
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$n!$	faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}_0$
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část reálného x
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného x
(a, b)	otevřený interval, nebo uspořádaná dvojice, podle kontextu
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$H_a(\varepsilon)$	ε-okolí bodu a
$H_a^+(\varepsilon),\ H_a^-(\varepsilon)$	pravé, levé ε-okolí bodu a
$H_{+\infty}(\alpha),\ H_{-\infty}(\alpha)$	α-okolí bodu $+\infty$, $-\infty$
$f : A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
D_f	definiční obor zobrazení f
H_f	obor hodnot zobrazení f
$f\vert_M$	zúžení zobrazení f na množinu M
$f(M)$	obraz množiny M při zobrazení f
$f^{-1}(M)$, $f_{-1}(M)$	vzor množiny M při zobrazení f
$f \circ g$	složené zobrazení
id_A	identické zobrazení na množině A

f^{-1} .... inverzní zobrazení
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) .... reálná číselná posloupnost
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ .... limita posloupnosti
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .... číselná řada
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a
$\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a zprava
$\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a zleva
$f'(a)$ .... derivace funkce f v bodě a
$T_{n,a}$ .... Taylorův polynom stupně n se středem v bodě a
$R_{n,a}$ .... zbytek po n-tém Taylorově polynomu
$\omega_{n,a}$ .... Peanův tvar zbytku
$\int f$, $\int f(x)\mathrm{d}x$ .... neurčitý integrál funkce f
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ .... Riemannův určitý integrál funkce f na intervalu (a,b)
$\mathcal{I}(\sigma, f)$ .... integrální součet funkce f při rozdělení σ
$a_n \sim b_n$ .... asymptoticky ekvivalentní posloupnosti
$\mathcal{O}(a_n)$ .... posloupnost s horní asymptotickou mezí a_n

Kapitola č. 1

Základní pojmy a úvod

Množina reálných čísel; algebraické vlastnosti reálných čísel; axiom úplnosti; absolutní hodnota; zobrazení; zúžení zobrazení; obraz a vzor množiny; složené zobrazení; vlastnosti zobrazení; identické zobrazení; inverzní zobrazení; reálná funkce reálné proměnné; přirozený definiční obor; uspořádaná dvojice; kartézský součin množiny; graf funkce.

V této kapitole předpokládáme, že čtenář je již seznámen se základními množinovými operacemi, způsoby zadání množin (výčtem, vlastností) a orientuje se mezi základními číselnými množinami (přirozená, celá, racionální a reálná čísla – těm se ale v této kapitole budeme věnovat znovu a podrobněji). Dále předpokládáme znalost základních vlastností elementárních funkcí (polynomiální, racionální, mocninné, exponenciální, logaritmické a trigonometrické). V neposlední řadě též předpokládáme znalost základních kombinatorických vztahů, to jest definici faktoriálu, kombinačního čísla, či binomické věty.

Pokud si čtenář v některých z těchto zmíněných partiích není jistý může si znalosti osvěžit například v prázdninovém Přípravném kurzu matematiky (BI-PKM), nebo s pomocí své oblíbené učebnice středoškolské matematiky.

1.1 Množina reálných čísel

Nejprve se budeme zabývat množinou reálných čísel, která v našem výkladu matematické analýzy představuje ústřední pojem. Tuto množinu představíme jako přirozené rozšíření množiny racionálních čísel.

Přirozená, celá a racionální čísla

Označme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množinu přirozených čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ množinu celých čísel a $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná$\}$ množinu racionálních čísel. Na těchto množinách, které jsou v množinovém vztahu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, umíme přirozeně sčítat a násobit, přičemž všechny tři množiny jsou vůči těmto operacím uzavřené[1]. Tyto operace dále pro každé $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (nebo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$) splňují:

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, && \text{(komutativita)},\\
a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, && \text{(asociativita)},\\
a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & & && \text{(distributivita)}.
\end{aligned}
$$

Konvenčně se zavádí přednost[2] násobení před sčítáním a distributivitu proto můžeme zkráceně zapsat také bez uzávorkovaní na pravé straně, tedy

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

[1] To znamená, že výsledek operace nad čísly z dané množiny je opět číslo z této množiny.

[2] Priorita operací je v programovacích jazycích známa pod termínem *operator precedence*. Viz např. prioritu operátorů v jazyce C. Uvědomte se, že bez zavedení této konvence například výraz $3 \cdot 5 + 7$ nemá smysl – nelze ho jednoznačně interpretovat. Tento postřeh není vázán pouze na sčítání a násobení reálných čísel.

Inverzními (opačnými) operacemi ke sčítání a násobení jsou odčítání a dělení nenulovým číslem. Vůči nim však nejsou všechny výše uvedené množiny uzavřené. V přirozených číslech můžeme bez omezení pouze sčítat a násobit. V celých číslech můžeme bez omezení navíc odčítat a v racionálních číslech odčítat a dělit jakýmkoli nenulovým racionálním číslem. Znamená to tedy, že v $\mathbb{Z}$ můžeme jednoznačně řešit rovnice typu

$$x + a = b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Z}$. Toto není pravda o množině přirozených čísel (rovnice $x + 5 = 3$ pro neznámou x nemá mezi přirozenými čísly řešení). Podobně v $\mathbb{Q}$ můžeme řešit rovnice typu

$$q \cdot x = p, \quad p, q \in \mathbb{Q},\ q \neq 0,$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Q}$. Toto tvrzení ale neplatí o celých číslech (rovnice $4x = 5$ nemá celočíselné řešení x).

Poznámka (Co to všechno znamená?)**:** Za tímto rozšiřováním číselných množin je možné vidět praktickou potřebu popisu stále sofistikovanějších reálných situací. Přirozená čísla nám postačí k popisu počtu stejných objektů (deset krav, jeden vlk atp.). V jejich rámci už ale snadno nevyjádříme např. koncept „dluhu“. Tento problém odstraňují celá čísla. Pomocí celých čísel ale nejsme jednoduše schopni popisovat části celků (půl koláče, tři pětiny senátu atp.). Tento nedostatek odstraňují racionální čísla. S jejich pomocí můžeme snadno pracovat se zlomky (částmi) celků.

Podívejme se nyní podrobněji na algebraickou[3] strukturu racionálních čísel. Mezi racionálními čísly existují čísla 0 (nula) a 1 (jedna) splňující

$$a + 0 = a \quad \text{a} \quad a \cdot 1 = a,$$

pro každé $a \in \mathbb{Q}$. Dále ke každému $a \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $-a \in \mathbb{Q}$ splňující $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Podobně, ke každému nenulovému číslu $a \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1$.

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, že množina racionálních čísel spolu s operacemi sčítání a násobení splňuje asociativní, distributivní a komutativní zákony, existují v ní prvky 0 a 1 a opačné, resp. inverzní, prvky popsané výše. To znamená, že racionální čísla spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří **číselné těleso**[4].

Otázka 1.1: Tvoří přirozená čísla spolu s operacemi sčítání a násobení těleso? A jak je tomu v případě celých čísel?

Uspořádání a vzdálenost racionálních čísel

Vraťme se zpět k racionálním číslům. Vedle algebraických vlastností mají racionální čísla další zajímavé vlastnosti. Racionální čísla lze porovnávat podle velikosti. Jsou-li a, b racionální čísla, pak zápisem $a < b$ vyjadřujeme, že číslo a je (ostře) menší než číslo b, a tuto vlastnost definujeme jako

$$a < b, \quad \text{právě když} \quad 0 < b - a, \tag{1.1}$$

přičemž pro racionální číslo $c = b - a$ zapsané v základním tvaru jako $c = \frac{p}{q}$ platí $c > 0$, právě když $p, q \in \mathbb{N}$ (čitatel i jmenovatel jsou kladná přirozená čísla). Takto zavedené porovnání (tj.

[3] Tj. co se sčítání/odčítání a násobení/dělení týče.

[4] Více se o číselných tělesech dozvíte v předmětu BI-LIN. Pro aplikace v počítačové bezpečnosti (kryptologii, šifrování) mají velký význam zvláště konečná tělesa. Tj. tělesa s konečným počtem prvků. $\mathbb{Q}$ je těleso s nekonečným počtem prvků.

$<$) představuje relaci[5] (ostrého) **uspořádaní** na $\mathbb{Q}$, která je úplná, tj. pro libovolná dvě různá racionální čísla a a b lze rozhodnout, zda-li $a < b$ nebo $b < a$.

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že pro každé $a, b, c \in \mathbb{Q}$ platí[6]:

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c, \\ a > 0,\ b > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot b > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Z těchto vlastností lze snadno odvodit další známé vztahy jako například $(a < b,\ c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ a $(a < b,\ c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ platné pro každé racionální a, b, c. Poznamenejme, že těleso s úplným uspořádáním splňujícím předchozí vlastnosti se nazývá uspořádané těleso.

Otázka 1.2: Pomocí výše definovaného uspořádání $<$ na množině racionálních čísel (viz rovnici (1.1)) dokažte implikaci (1.2).

Poznámka: Pomocí uspořádání $<$ můžeme zavést také (neostré) uspořádání $a \leq b$, ekvivalentní platnosti $a < b$ nebo $a = b$. Pod $a \geq b$ máme pak přirozeně na mysli $b \leq a$.

Díky konceptu úplného uspořádání si můžeme racionální čísla představovat jako body na číselné ose, viz obrázek 1.1.

Uspořádání racionálních čísel nám dále umožňuje definovat veledůležitý pojem vzdálenosti mezi racionálními čísly. **Vzdálenost** dvou racionálních čísel a, b definujeme pomocí absolutní hodnoty jako $|a - b|$, kde $|\cdot|$ je **absolutní hodnota**, definovaná vztahem

$$|x| := \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Tento zápis je třeba číst takto: Hodnota $|x|$ je definována jako x pokud x je nezáporné a jako $-x$ pokud x je záporné. Způsob zápisu použitý v rovnici (1.3) je poměrně častý a ještě na něj několikrát narazíme. V oblíbeném programovacím jazyce Python bychom například psali

```python
def abs(x):
  if x >= 0:
    return x
  elif x < 0:
    return -x
```

Z obecně známých vlastností[7] absolutní hodnoty připomeňme jenom veledůležitou **trojúhelníkovou nerovnost**

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{1.4}$$

platící pro každé racionální a, b.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti. Přímo z definice absolutní hodnoty (1.3) plyne platnost nerovností $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Uvažme libovolné $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud $a + b \geq 0$ potom $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$. Je-li $a + b < 0$ potom $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$. □

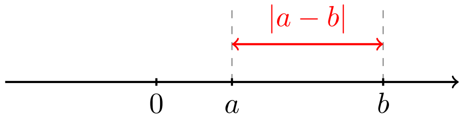
[5] Pojem relace nebudeme na tomto místě formálně zavádět.

[6] Symbol $\Rightarrow$ znamená **implikaci**, která vyjadřuje: „Jestliže jsou splněny podmínky vlevo, pak platí tvrzení vpravo.“

[7] Např. snadno z definice odvoditelné $|-a| = |a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, atp.

Neúplnost racionálních čísel

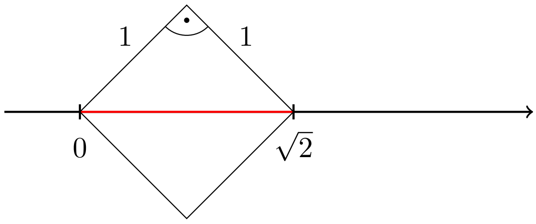
Racionální čísla obvykle graficky znázorňujeme jako body na tzv. číselné ose, tj. na přímce s vyznačeným počátkem. Na obrázku 1.1 je tímto způsobem znázorněno uspořádání dvou racionálních čísel a jejich vzdálenost. Při grafickém znázornění pomocí číselné osy je každému



Obrázek 1.1: Číselná osa s body $a, b \in \mathbb{Q}$. Zde $a < b$ a tudíž $|a-b| = b-a$.

racionálnímu číslu přiřazen jeden bod. Opak však *neplatí*. Existují body na číselné ose[8], které nelze vyjádřit racionálním číslem. Ilustrujme toto tvrzení na následujícím příkladu.

Příklad: Neexistuje kladné racionální řešení rovnice $x^2 = 2$. Graficky toto tvrzení odpovídá nemožnosti popsat bod odpovídající konci úhlopříčky čtverce o straně s velikostí 1 otočeného o $45°$ pomocí racionálního čísla. Viz obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Bod na číselné ose odpovídající $\sqrt{2}$ lze zjevně zkonstruovat pomocí úhlopříčky čtverce o straně délky 1. Lze ho ale popsat pomocí racionálního čísla?

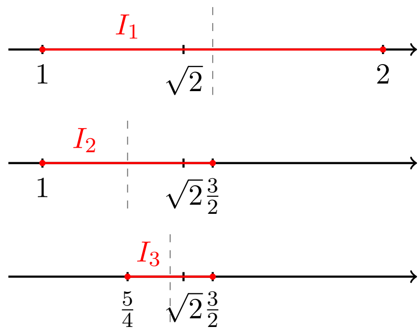
Dokažme toto tvrzení **sporem**. Předpokládejme opak, tj. že existují $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná a taková, že $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Pak p^2 $(= 2q^2)$ je nutně sudé číslo, tj. je tvaru $p = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Tedy $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, tj. q^2 i q jsou sudá čísla, $q = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že p, q jsou soudělná (obě jsou dělitelná 2), což je ale spor s naším předpokladem (nesoudělností p a q). $\triangle$

Nyní ukážeme jak obecně zformulovat požadavek „bezděrovosti" číselné osy. Předpokládejme, že máme množinu $\mathbb{R}$, která obsahuje racionální čísla, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a máme na ní definované operace násobení, sčítání, jejich inverze (odčítání a dělení) a také uspořádání $<$ a všechny tyto operace mají *stejné* vlastnosti, jako u racionálních čísel (tj. jedná se o úplně uspořádané číselné těleso, viz výše).

Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ a nazvěme tuto množinu **uzavřeným intervalem** a body a, b koncovými body tohoto intervalu. Délkou intervalu $\langle a, b\rangle$ nazýváme číslo $|b-a|$, tj. vzdálenost jeho koncových bodů. Z vlastností absolutní hodnoty, které jsou nutně stejné jako pro racionální čísla, plyne nerovnost $|x-y| \leq |b-a|$ platná pro každé $x, y \in \langle a, b\rangle$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbb{R}$ již obsahuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označíme $\sqrt{2}$. Pro $\sqrt{2}$ musí platit $\sqrt{2} \in \langle 1, 2\rangle = I_1$ (protože $a < 1$ implikuje $a^2 < a \cdot 1 < 1$ a $a > 2$ implikuje $a^2 > a \cdot 2 > 2$), tudíž pro $\sqrt{2}$ nemůže platit ani $\sqrt{2} < 1$ ani $\sqrt{2} > 2$). Rozpůlením I_1 podobným způsobem zjistíme, že $\sqrt{2} \in \langle 1, \frac{3}{2}\rangle = I_2$ (protože $a > 3/2$ implikuje $a^2 > 9/4 > 2$).

[8]Pojem bodu na číselné ose zde chápeme intuitivně. Korektní matematická definice již ve skutečnosti využívá reálných čísel.



Obrázek 1.3: Konstrukce intervalů I_1, I_2 a I_3.

Pokračujeme nadále půlením těchto uzavřených intervalů. Protože takto konstruované koncové body jsou vždy racionální čísla a $\sqrt{2}$ racionální není, nikdy se nestane, že by po nějakém dělení byl bod $\sqrt{2}$ koncovým bodem, a postup tak lze libovolně opakovat. Dostáváme tudíž intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet $\sqrt{2}$. Pro tyto intervaly platí inkluze $I_{n+1} \subset I_n$ a délka intervalu I_n je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Tudíž $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ je nejvýše jednoprvková množina. To platí, protože pro každé 2 různé body, mezi nimiž je nutně vzdálenost $d > 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že délka intervalu I_m je menší než d, a nemohou tedy oba současně patřit do I_m a tedy ani do průniku. Náš požadavek $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{\sqrt{2}\right\}.$$

Grafickou ilustraci konstrukce těchto intervalů lze nalézt na obrázku č. 1.3.

Axiom úplnosti

Obecný požadavek aby množina $\mathbb{R}$ „neměla díry“ můžeme nyní přesně formulovat jako tzv. axiom úplnosti:

Axiom úplnosti: Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Podrobněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

1. $I_n \supset I_{n+1}$ pro libovolné $n = 1, 2, \ldots$,

2. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Poznamenejme, že v průniku takovýchto intervalů může ležet nejvýše jedno reálné číslo. Pokud bychom předpokládali existenci dvou různých čísel ležících v tomto průniku, snadno se dostaneme do sporu s libovolností délky uvažovaných intervalů.

Lze ukázat, že taková množina $\mathbb{R}$, která je úplným uspořádaným tělesem splňujícím axiom úplnosti, existuje a nazýváme ji množinou **reálných čísel**.

Je důležité si uvědomit, že axiom úplnosti je to jediné, co odlišuje reálná čísla od racionálních. Jak bylo ukázáno výše, racionální čísla tento axiom nesplňují. Algebraicky (vzhledem k $+$ a $\cdot$) mají jinak tyto množiny shodné vlastnosti. Pro úplnost dodejme, že reálná čísla také znázorňujeme jako body na číselné ose, přičemž nyní již každému bodu na této ose odpovídá právě jedno reálné číslo. Z tohoto důvodu někdy číselnou osu nazýváme reálnou osou.

Reálná čísla: shrnutí

Pro úplnost shrňme vlastnosti množiny $\mathbb{R}$ a operací sčítání $(+)$, násobení $\cdot$ a uspořádání $<$:

- asociativní zákony,
- komutativní zákony,
- distributivní zákony,
- existence nuly a jedničky,
- opačné prvky,
- inverzní prvky,
- úplné uspořádání,
- axiom úplnosti.

Okolí bodu a rozšířená reálná osa

Výše v textu jsme definovali pojem uzavřeného intervalu. Tuto definici nyní zopakujme a rozšiřme i o další typy **intervalů**. Nechť pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$. Potom definujeme:

otevřený interval	$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval	$\langle a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$(a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Dále definujeme neomezené intervaly

$$\begin{aligned}
(a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
\langle a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
(-\infty,b\rangle &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční** bod a b tzv. **koncový** bod intervalu. Body a a b jsou také souhrnně nazývány **krajními** body daných intervalů. Pro neomezené intervaly s krajním bodem 0 často používáme speciální značení:

$$\mathbb{R}^+ = (0,+\infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty,0), \quad \mathbb{R}_0^+ = \langle 0,+\infty), \quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty,0\rangle,$$

tedy popořadě kladná, záporná, nezáporná a nekladná reálná čísla.

Poznámka: V předchozím odstavci jsme o některých podmnožinách reálné osy mluvili jako o neomezených. Tento pojem je zřejmě intuitivně uchopitelný, ale pro úplnost uveďme i jeho formální definici.

- Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in A$ platí nerovnost $|x| < K$.

- Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **neomezenou**, právě když není omezená. Tedy pro každé $K > 0$ existuje $x \in A$ splňující $|x| > K$.

Například množina $\mathbb{N}$ je neomezená. Naproti tomu množina $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (nalezněte příslušnou konstantu K!).

Otázka 1.3: Které z následujících množin jsou omezené a které neomezené?

a) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

b) $\{\operatorname{tg} x \mid x \in (-\pi/4, \pi/4)\}$,

c) $\{\operatorname{tg} x \mid x \in (-\pi/4, \pi/2)\}$,

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$

Dalším důležitým pojmem je okolí bodu, které budeme později intenzivně využívat.

Definice 1.4 (Okolí bodů z $\mathbb{R}$)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$ právě, když $|x - a| < \varepsilon$. Bod x tedy patří do ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když jeho vzdálenost od a je menší než ε. O parametru ε se z očividných důvodů často mluví jako o **poloměru** a o bodu a jako o **středu** okolí $H_a(\varepsilon)$.

Výše zavedená okolí $H_a(\varepsilon)$ též často nazýváme oboustranná, tyto množiny se totiž „rozprostírají“ na obě strany od bodu a. Dále zavádíme tzv. jednostranná okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.5 (Jednostranné okolí bodů z $\mathbb{R}$)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a, a+\varepsilon)$, resp. $(a-\varepsilon, a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, **ε-okolím bodu a** a značíme ho $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.

Dále je často výhodné pracovat se symboly $+\infty$ a $-\infty$ podobným způsobem jako s reálnými čísly. V následující definici proto o tyto prvky množinu reálných čísel rozšíříme.

Definice 1.6: Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou množinou reálných čísel** (případně též rozšířenou reálnou osou).

Na množině $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeným způsobem zavádíme uspořádání pomocí vztahů

$$-\infty < x < +\infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Definice operací sčítání a násobení na $\overline{\mathbb{R}}$ necháme na později (viz sekci 2.5).

Pro další potřeby je vhodné rozšířit pojmy okolí těchto nových bodů $+\infty$ a $-\infty$.

Definice 1.7: Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme okolím bodu $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_\infty(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

Okolí bodu a máme tedy definované pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Všimněte si, že toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$. Není-li u okolí bodu a třeba specifikovat jeho velikost, tj. zadávat konkrétní hodnotu ε případně c, píšeme zkráceně H_a.

Příklad: Procvičme si výše zavedené názvosloví,

- interval $(-1, 1)$ je okolím bodu 0 s poloměrem 1, jedná se o $H_0(1)$
- interval $\langle -1, 1\rangle$ není okolím bodu 0,
- interval $(-1, 2)$ není okolím bodu 0,
- interval $(10, +\infty)$ je okolím bodu $+\infty$, jedná se o $H_{+\infty}(10)$,

bin.	hex.	znak	bin.	hex.	znak	bin.	hex.	znak
010 0000	20	(mezera)	100 0000	40	@	110 0000	60	‘
010 0001	21	!	100 0001	41	A	110 0001	61	a
010 0010	22	"	100 0010	42	B	110 0010	62	b
010 0011	23	#	100 0011	43	C	110 0011	63	c
010 0100	24	$	100 0100	44	D	110 0100	64	d
010 0101	25	%	100 0101	45	E	110 0101	65	e
010 0110	26	&	100 0110	46	F	110 0110	66	f
010 0111	27	’	100 0111	47	G	110 0111	67	g
010 1000	28	(	100 1000	48	H	110 1000	68	h
010 1001	29	)	100 1001	49	I	110 1001	69	i
010 1010	2A	*	100 1010	4A	J	110 1010	6A	j
010 1011	2B	+	100 1011	4B	K	110 1011	6B	k
010 1100	2C	,	100 1100	4C	L	110 1100	6C	l
010 1101	2D	-	100 1101	4D	M	110 1101	6D	m
010 1110	2E	.	100 1110	4E	N	110 1110	6E	n
010 1111	2F	/	100 1111	4F	O	110 1111	6F	o
011 0000	30	0	101 0000	50	P	111 0000	70	p
011 0001	31	1	101 0001	51	Q	111 0001	71	q
011 0010	32	2	101 0010	52	R	111 0010	72	r
011 0011	33	3	101 0011	53	S	111 0011	73	s
011 0100	34	4	101 0100	54	T	111 0100	74	t
011 0101	35	5	101 0101	55	U	111 0101	75	u
011 0110	36	6	101 0110	56	V	111 0110	76	v
011 0111	37	7	101 0111	57	W	111 0111	77	w
011 1000	38	8	101 1000	58	X	111 1000	78	x
011 1001	39	9	101 1001	59	Y	111 1001	79	y
011 1010	3A	:	101 1010	5A	Z	111 1010	7A	z
011 1011	3B	;	101 1011	5B	[	111 1011	7B	{
011 1100	3C	<	101 1100	5C	\	111 1100	7C	|
011 1101	3D	=	101 1101	5D	]	111 1101	7D	}
011 1110	3E	>	101 1110	5E	^	111 1110	7E	~
011 1111	3F	?	101 1111	5F	_			

Tabulka 1.1: Tisknutelné znaky ASCII tabulky.

- interval $(-\infty, 1\rangle$ není okolím bodu $+\infty$,
- interval $\langle 2, 3)$ je pravým okolím bodu 2, jedná se o $H_2^+(1)$.

Laskavý čtenář si v tento okamžik jistě rád vymyslí další příklady. $\triangle$

1.2 Zobrazení

Ve velké části předmětu BI-ZMA se budeme zabývat vlastnostmi funkcí. Funkce jsou speciálním případem zobrazení, které si v této kapitole zavedeme.

Začněme nejprve několika motivačními příklady konceptu zobrazení.

Příklad (ASCII tabulka)**:** Data v počítači jsou uložena v binární formě. Nejjednodušším způsobem jak zakódovat (nejen) znaky latinské abecedy je ASCII tabulka. Každému celému číslu v rozsahu 0 až 255 je *přiřazen* jistý znak. Nekompletní ukázka je uvedena v tabulce č. 1.1. $\triangle$

Příklad (Reálná druhá odmocnina)**:** Buď x libovolné nezáporné reálné číslo. Rovnice $z^2 = x$ má právě jedno nezáporné řešení z. Toto řešení označme symbolem $\sqrt{x}$ a nazvěme ho druhou odmocninou z x.

Rozeberme odstavec výše podrobněji. Dá-li nám nepřítel (uživatel) nezáporné kladné číslo x, pak abychom mu vrátili $\sqrt{x}$, musíme vyřešit rovnici $z^2 = x$ s nezápornou neznámou z. V předchozím odstavci se tvrdí, že toto řešení existuje a je dáno jednoznačně (je právě jedno).

- Jednoznačnost dokážeme snadno sporem: předpokládejme, že máme dvě nezáporná a vzájemně různá z_1, z_2 splňující $z_1^2 = x$ a $z_2^2 = x$. Potom nutně platí $z_1^2 - z_2^2 = x - x = 0$. Pomocí známého algebraického vztahu odtud plyne rovnost $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$. Protože ale (dle našich předpokladů) $z_1 + z_2 \neq 0$ můžeme tuto rovnost upravit a získat rovnost $z_1 - z_2 = 0$, čili $z_1 = z_2$. Což je spor (předpokládali jsme $z_1 \neq z_2$).
- Existence: prozatím odložíme (není triviální, viz větu 4.17).

Odstavcem výše je tedy výsledek $\sqrt{x}$ dobře definován. Intuitivně si představujeme, že na vstup x se *zobrazí* na výstup $\sqrt{x}$.

Konkrétně například $\sqrt{4} = 2$, protože $2^2 = 4$. Z výše uvedeného také plyne, že i pro π existuje jisté číslo $\sqrt{\pi}$ splňující $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$. Jak vypočítat jeho hodnotu (v dané přesnosti) výše uvedená definice druhé odmocniny neřeší. $\triangle$

Přistupme nyní k samotné definici zobrazení.

Definice 1.8: Nechť jsou dány dvě množiny A, B a předpokládejme, že ke každému prvku x z množiny A je jednoznačným způsobem přiřazen právě jeden prvek z množiny B, který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že f je **zobrazení** množiny A do množiny B, a tento fakt značíme $f : A \to B$. Množinu A nazýváme **definičním oborem** f a element $f(x)$ pro dané $x \in A$ nazýváme **hodnotou zobrazení** f v bodě x.

Pro explicitní zdůraznění faktu, že bod x je pomocí f zobrazen na bod $y = f(x)$, někdy používáme značení[9] $f : x \mapsto y$. Definiční obor zobrazení $f : A \to B$ často značíme symbolem D_f, případně $D(f)$. Ilustrace k definici zobrazení je uvedena na obrázku č. 1.4.

Poznámka (Funkce vs. funkční hodnota)**:** Rozlišování mezi funkční hodnotou a funkcí je běžné i v programovacích jazycích. Například v Pythonu můžeme jediným příkazem vytvořit funkci f působící na svém argumentu předpisem $f(x) = x + 10$,

```
f = lambda x: x + 10
```

V proměnné `f` je nyní uložen objekt typu funkce, příkaz `type(f)` nám vrátí `function`. `f` má smysl samo o sobě (*an sich*). Teprve voláme-li funkci `f` na konkrétním argumentu, získáme funkční hodnotu. Například položíme-li `x=3` po vyhodnocení `f(x)` dostaneme `13`.

Zobrazení tedy zobrazuje prvky ze svého definičního oboru na jiné prvky ve svého oboru hodnot. Často bývá výhodné neuvažovat pouze o jednotlivých, prvcích ale rovnou o *množinách* prvků které jsou zobrazovány, případně na které se zobrazuje. Proto zavádíme následující pojmy.

Definice 1.9: Nechť jsou dány dvě množiny A a B a zobrazení $f : A \to B$. Je-li $E \subset A$, pak množinu[10]

$$f(E) := \{f(x) \in B \mid x \in E\}$$

nazveme **obrazem množiny** E **při zobrazení** f. Množinu $f(A)$ nazveme **oborem hodnot zobrazení** f. Je-li $G \subset B$, potom množinu

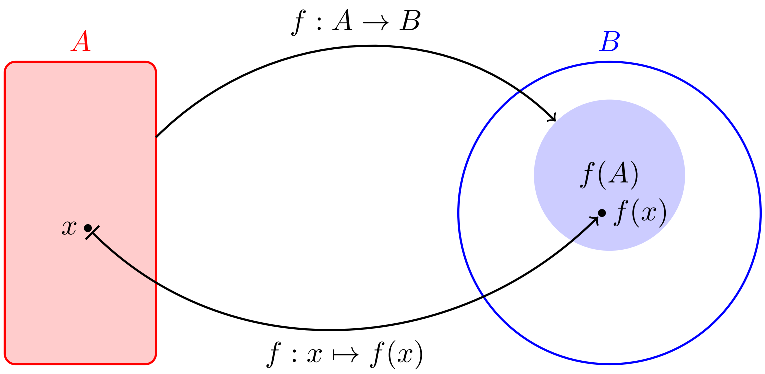
$$f^{-1}(G) := \{x \in A \mid f(x) \in G\}$$

nazveme **vzorem množiny** G při zobrazení f.

[9] Čili x je zobrazeno na y. Například druhou mocninu bychom takto zapsali jako $f : x \mapsto x^2$.

[10] Množina $f(E)$ je tedy tvořena hodnotami zobrazení f ve všech bodech množiny E. Formálně lze psát $f(E) = \big\{y \in B \mid (\exists x \in E)\big(y = f(x)\big)\big\}$.

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(G)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (tj. f^{-1}, viz níže). Všimněte si, že obrazem jednoprvkové množiny $\{x\}$ pro nějaké $x \in A$ je $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ a tedy jednoprvková množina. Z tohoto důvodu se $f(x)$ také někdy nazývá obrazem bodu x při zobrazení f.



Obrázek 1.4: Zobrazení množiny A do množiny B. Oborem hodnot zobrazení f je množina $f(A)$, tj. obraz definičního oboru A při zobrazení f.

Příklad: Koncept obrazu množiny při zobrazení je často využívaný v programovacích jazycích podporujících funkcionální paradigma. Například množinu[11] všech druhých mocnin všech přirozených čísel mezi 0 a 5 v Pythonu vytvoříme příkazem[12]

```
[ n ** 2 for n in range(6) ]
```

Srovnejte tento zápis s matematičtějším zápisem

$$\{n^2 \,|\, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Tato množina představuje obraz množiny $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ při zobrazení definovaným předpisem $f(n) = n^2$, $n \in D_f := \mathbb{N}$. Jedná se tedy o množinu $f(E)$. V jazyce Python tohoto faktu také můžeme využít

```
map(lambda x: x ** 2, range(6))
```

Obecně lze říci, že funkcionální pohled často nabízí větší přehled o tom co se v kódu zrovna děje. △

Rovnost mezi dvěma zobrazeními zavádíme následovně.

Definice 1.10: Máme-li dvě zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to B$ pak říkáme, že se **rovnají** a píšeme $f = g$, právě když $A = C$ (rovnají se jejich definiční obory) a pro každé $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$ (rovnají se funkční hodnoty ve všech bodech společného definičního oboru).

Příklad: Mějme tři zobrazení f, g a h s definičními obory

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \langle 0, +\infty), \quad D_h = \langle 0, +\infty)$$

dané předpisy

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad x \in D_f, \\ g(x) &= x, \quad x \in D_g, \\ h(x) &= |x|, \quad x \in D_h. \end{aligned}$$

[11] Technicky `list`.
[12] Operátor `**` v Pythonu představuje umocňování.

Potom $f \neq g$, $g = h$ a $f \neq h$. △

Podle dodatečných vlastností zobrazení vyčleňujeme následující tři důležité typy.

Definice 1.11 (Důležité typy zobrazení)**:** Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže $f(A) = B$, to jest pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.

Z pohledu obrázku č. 1.4 můžeme o prvních dvou typech zobrazení uvažovat také graficky. U prostého zobrazení tedy nikdy „nemíří dvě šipky z různých bodů A do jednoho bodu v B“. U zobrazení na pak „vede alespoň jedna šipka do každého bodu B“. Pomocí kvantifikátorů lze tyto podmínky zapsat následovně:

$$\begin{aligned} f \text{ je prosté} \quad &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\Big((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))\Big), \\ f \text{ je na} \quad &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y). \end{aligned}$$

Při ověřování prostoty zobrazení častěji využíváme ekvivalentní formulaci[13]:

$$f \text{ je prosté} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\Big((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)\Big).$$

Příklad (Identické zobrazení)**:** Buď A libovolná množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisem

$$\mathrm{id}_A(x) := x, \quad x \in A,$$

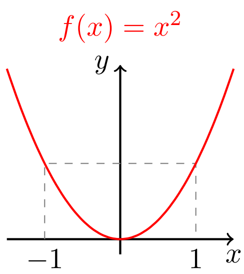
nazýváme **identické zobrazení**. Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní. △

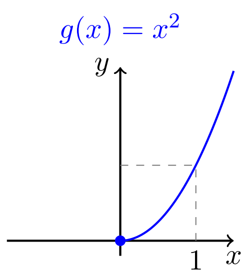
Příklad: Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem $f(n) := n^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je prosté, ale není na. Skutečně, splňují-li $n, m \in \mathbb{N}$ rovnost $f(n) = f(m)$, pak $n^2 = m^2$ a díky kladnosti i $n = m$. Zobrazení nemůže být na, protože například pro $m = 3$ neexistuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n^2 = 3$. △

Nyní se zaměříme na způsoby jak lze ze zobrazení vyrábět nová zobrazení. Ukážeme si zúžení, skládání a invertování.

Definice 1.12: Buď $f : A \to B$ a $M \subset A$. Zobrazení $g : M \to B$ definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro každé $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f|_M$.

Příklad: Ukažme si příklad zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaného pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^2$ a jeho zúžení $g = f|_{\mathbb{R}_0^+}$.





△

[13] Vzpomeňte na větu obměněnou.

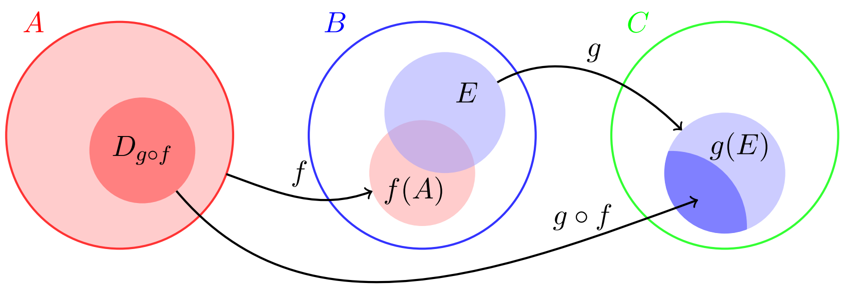
Nová zobrazení můžeme také vytvářet pomocí skládání zobrazení, pokud jsou zobrazení správného typu.

Definice 1.13: Nechť $E \subset B$ a nechť $f : A \to B$ a $g : E \to C$ jsou zobrazení. Označíme-li $D_{g\circ f} = f^{-1}(E) \subset A$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g\circ f} \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

pro všechna $x \in D_{g\circ f}$.

O definičním oboru složeného zobrazení pouze víme, že $D_{g\circ f} \subset A$. V případě, že $f(A) \cap E = \emptyset$, nastane situace $D_{g\circ f} = \emptyset$. Názorně je tato situace uvedena na obrázku č. 1.5. O funkci g se často mluví jako o **vnější** a o f jako o vnitřní funkci složeného zobrazení $g \circ f$.

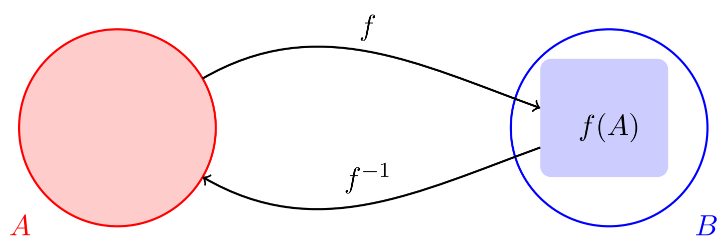


Obrázek 1.5: Složené zobrazení.

Přirozeně se nabízí otázka, jestli můžeme „změnit směr“ zobrazení $f : A \to B$. Přesněji, jestli zadanému prvku z oboru hodnot zobrazení f můžeme jednoznačně přiřadit nějaký prvek v definičním oboru $D_f = A$. To lze zřejmě pouze v případě, že každý prvek v oboru hodnot má právě jeden vzor, čili když zobrazení je prosté. Je-li tedy $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot $f(A)$ lze přiřadit právě jedno y z množiny A tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme inverzním a značíme f^{-1}.

Definice 1.14: Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak **inverzní** zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$ definujeme pro každé $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde x je takový prvek A, že $y = f(x)$.

Z definice ihned plyne $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$, přičemž f^{-1} je jediné zobrazení, které tuto dvojici podmínek splňuje. K ilustraci tohoto pojmu také uvádíme obrázek č. 1.6.



Obrázek 1.6: Prosté zobrazení $f : A \to B$ a jeho inverze $f^{-1} : f(A) \to A$.

Příklad: Uvažme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definované předpisem[14]

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[14]Pro reálné x označuje $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x.

Toto zobrazení je prosté a na. Inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je dáno předpisem

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m \geq 1, \\ 1 - 2m, & m \leq 0, \end{cases}$$

pro libovolné celočíselné m. △

1.3 Reálná funkce reálné proměnné

Matematická analýza, kterou budeme v tomto kurzu studovat, spočívá převážně ve studiu **reálných funkcí reálné proměnné**. Intuitivně je takové funkce jednoznačný výsledek nějakého procesu, který lze měřit pomocí reálných čísel. Přitom výsledek procesu závisí na měnícím se vstupu, jehož hodnotu lze opět popsat pomocí reálných čísel. Jedná se tedy o speciální případ zobrazení.

Definice 1.15: Zobrazení $f : D_f \to \mathbb{R}$, kde $D_f \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka: V celém kurzu BI-ZMA budeme termín reálná funkce reálné proměnné povětšinou zkracovat na termín **funkce**.

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí funkčního předpisu typu $f(x) = V(x)$, kde $V(x)$ je nějaký výraz v proměnné x. Např. $f(x) = x^2 + 1$. **Přirozeným definičním oborem** takto zadané funkce nazýváme množinu všech reálných x, pro které má výraz $V(x)$ smysl jakožto reálné číslo, a lze mu tedy jednoznačně přiřadit reálné číslo. Pokud je dán pouze funkční předpis bez dalších detailů, automaticky máme na mysli funkci definovanou na příslušném přirozeném definičním oboru.

Příklad: Pod funkcí f zadanou explicitně vzorcem $f(x) = \sqrt{x+1}$ si tedy představíme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ určenou tímto předpisem na přirozeném definičním oboru, kterým je množina D_f takových $x \in \mathbb{R}$, že $\sqrt{x+1}$ má smysl a dává reálné číslo. Zřejmě tedy $D_f = \langle -1, +\infty)$. △

Příklad: Uvažme předpis $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem f je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Podmínky na „smysluplnost" daného výrazu jsou totiž v tomto případě nenulovost jmenovatele a nezápornost argumentu odmocniny. △

Tabulka 1.2: Přirozené definiční obory některých elementárních funkcí.

výraz	má smysl pro
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sqrt[2k]{x}$	$x \geq 0,\ k \in \mathbb{N}$
$\ln(x)$	$x > 0$
$\mathrm{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Protože jsou funkce zobrazeními, přenášíme na ně pojmy prostá, na a bijektivní. Také přenášíme zúžení funkce, skládání funkcí a inverzní funkce. Při výše zavedeném značení definičních oborů a oborů hodnot tak dostáváme známé vztahy pro složenou funkci $g \circ f$,

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(D_g), \quad H_{f \circ g} = g(H_f \cap D_g),$$

a také pro inverzní funkci f^{-1} k funkci f,

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= H_f, & H_{f^{-1}} &= D_f, \\ f^{-1} \circ f &= \mathrm{id}_{D_f}, & f \circ f^{-1} &= \mathrm{id}_{H_f}. \end{aligned}$$

Dále uvádíme několik příkladů demonstrujících tyto pojmy.

Příklad: Určíme zda je následující funkce prostá, na, případně bijektivní.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Funkce f je prostá. Vskutku, předpokládejme, že existují $x_1 \neq x_2$ taková, že $f(x_1) = f(x_2)$. Protože $f(x)$ má stejné znaménko jako x, tak musí mít x_1 stejné znaménko jako x_2 a zjevně též musí být obě nenulová. Předpokládejme, že jsou obě kladná. Potom $1/x_1 = 1/x_2$ je ekvivalentní $x_2 = x_1$ a dostáváme spor s předpokladem $x_1 \neq x_2$. Analogicky postupujeme, pokud by byla obě záporná.

Funkce f je také na. Pro $y = 0$ platí $f(0) = 0$ a pro $y \neq 0$ platí $f(1/y) = y$, tedy ke každému $y \in \mathbb{R}$ najdeme bod x takový, že $f(x) = y$. Celkově je tedy f bijektivní. △

Příklad: Uvažme funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = \sqrt{|x|}$ jejichž přirozenými definičními obory jsou $D_f = \langle 0, +\infty)$ a $D_g = \mathbb{R}$. Funkce f je zúžením funkce g na množinu $\langle 0, +\infty)$. Platí tedy $f = g\big|_{\langle 0,+\infty)}$.

Funkce f je prostá a příslušná inverzní funkce f^{-1} má definiční obor $D_{f^{-1}} = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \geq 0$ platí $f^{-1}(x) = x^2$. Funkce g prostá není, protože např. $g(-1) = g(1) = 1$. △

Příklad: Uvažujme funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Přirozenými definičními obory jsou $D_f = \mathbb{R}$ a $D_g = \langle 0, +\infty)$.

Složená funkce $g \circ f$ má definiční obor $D_{g\circ f} = f^{-1}\big(\langle 0, +\infty)\big) = \mathbb{R}$ a pro každé $x \in D_{g\circ f}$ platí $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$. Složená funkce $f \circ g$ má definiční obor $D_{f\circ g} = g^{-1}(\mathbb{R}) = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \in D_{f\circ g}$ platí $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$. Je tedy zřejmé, že $f \circ g \neq g \circ f$. Pokud ale zúžíme f na $\langle 0, +\infty)$, dostaneme už prostou funkci, ke které je funkce g inverzní. Tj. $\big(f\big|_{\langle 0,+\infty)}\big)^{-1} = g$. △

Vyjma výše uvedených typů funkcí (prostá, na, bijektivní) rozeznáváme rostoucí a klesající funkce.

Definice 1.16: Funkci f definovanou na množině M nazýváme

- **rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Pokud některá z výše zmíněných pojmů použijeme bez reference na množinu M, pak za M bereme celý definiční obor uvažované funkce. Například $f(x) = x^2$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, je funkce rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, ale nejedná se o rostoucí funkci. Funkce $g(x) = -x^3$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, je ostře klesající.

Není těžké si rozmyslet, že každá ostře rostoucí (nebo ostře klesající) funkce je prostá. Opak ale neplatí, ne každá prostá funkce je ostře klesající (nebo ostře rostoucí).

Definice 1.17: Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Funkci si často můžeme také představit, respektive nakreslit, pomocí jejího **grafu**. K tomu nejdřív potřebujeme matematicky vyjádřit pojem roviny.

Definice 1.18: Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme rovnost mezi uspořádanými dvojicemi následovně,

$$(x, y) = (u, v) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Všimněte si, že $\{x, y\}$ je množina shodná s $\{y, x\}$, kdežto uspořádané dvojice (x, y) a (y, x) nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pouze pomocí množinových pojmů, např. dvojici (x, y) lze ztotožnit s množinou $\{x, \{x, y\}\}$.

Definice 1.19: Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ a } y \in B\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Kartézský součin byl pojmenován na počest René Descarta (latinsky Renatus Cartesius, francouzský matematik, 1596 – 1650). Operace $\times$ mezi množinami je nekomutativní, tedy množina $A \times B$ je obecně různá od $B \times A$.

Příklad: Uvažme $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{a, b\}$. Potom

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3)\}. \end{aligned} \qquad \triangle$$

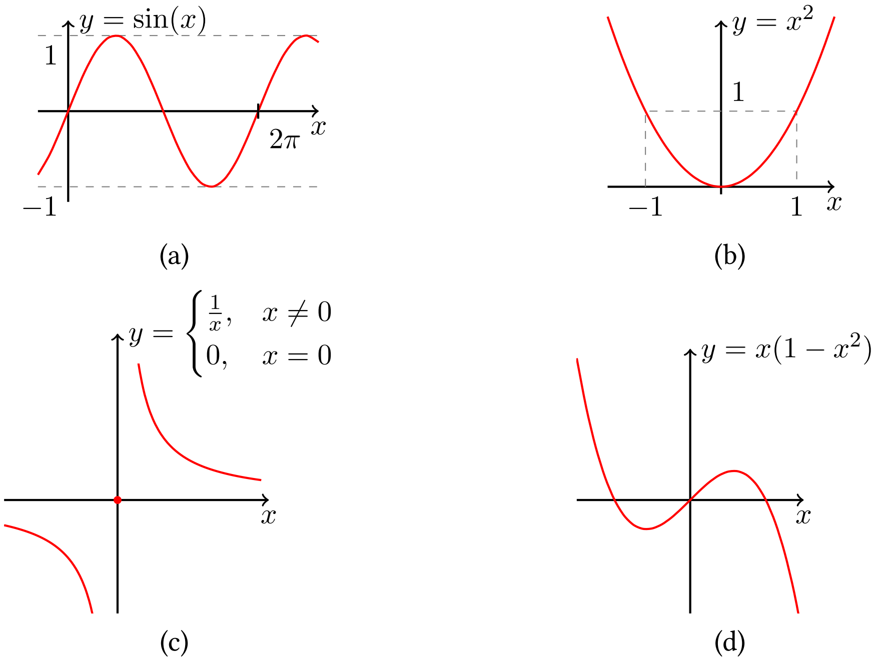
V kartézském součinu $A \times B$ jsou tedy všechny možné uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. Nyní již můžeme definovat graf funkce f.

Definice 1.20: **Grafem** funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Body kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se obvykle znázorňují jako body roviny vybavené tzv. kartézským souřadným systémem, což je dvojice vzájemně kolmých směrových přímek nazývaných souřadné osy, které se protínají v bodě zvaném počátek soustavy souřadné. Uspořádané dvojici $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ potom přísluší bod v rovině, který je od počátku ve směru první z os (nazývané x-ová osa) vzdálen x jednotek délky a ve směru druhé z os (y-ová osa) y jednotek délky. Graf funkce je tedy podmnožina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kterou můžeme přirozeně interpretovat jako rovinu.

Na obrázku 1.7 jsou pro ilustraci vykreslené grafy několika vybraných funkcí.



Obrázek 1.7: Grafy vybraných funkcí. Funkce na obrázcích (a) a (b) nejsou ani prosté ani na. Funkce na obrázku (c) je prostá i na. Funkce na obrázku (d) je pouze na.

Kapitola č. 2

Reálné posloupnosti

Reálná posloupnost; vlastnosti posloupností; vybraná posloupnost; rozšířená reálná osa; okolí bodů rozšířené reálné osy; limita číselné posloupnosti; jednoznačnost limity; konvergentní, divergentní posloupnosti; věta o limitě vybrané posloupnosti; kritéria konvergence; hromadný bod posloupnosti; Bolzano-Cauchyova věta; věta o existenci limity omezené monotónní posloupnosti; algebraické operace na množině $\overline{\mathbb{R}}$; věty o nerovnostech v limitách; věta o sevřené posloupnosti. Landauova symbolika. Výpočty limit důležitých posloupností.

2.1 Definice reálné posloupnosti

Pomocí pojmu posloupnosti můžeme formalizovat procesy probíhající v diskrétních krocích. Například posloupnost měření průměrné denní teploty v jistém místě, nebo posloupnost aproximací řešení jisté úlohy. V této kapitole si ukážeme, jak pojem posloupnosti definovat, jaké významné vlastnosti posloupností nás budou zajímat a jak definovat veledůležitý pojem limity posloupnosti.

Definice 2.1: Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Dále budeme používat následující standardní označení. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in \mathbb{N}$, tj. reálné číslo $a(n)$, označujeme pomocí dolního indexu[1] symbolem a_n a nazýváme **n-tým členem posloupnosti** a. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem (a_n). Případně více podrobněji píšeme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, či pouze $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Otázka 2.2: Vyzýváme čtenáře, aby vlastními slovy zformuloval, jaký je rozdíl mezi symbolem a_n a (a_n). Srovnejte s podobnou symbolikou u funkcí, tedy rozdílem mezi $f(x)$ a f v případě funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Bez velkých obtíží bychom mohli jako indexovou množinu J připustit libovolnou nekonečnou podmnožinu množiny $\mathbb{N}$. V tom případě bychom tento záměr zdůraznili zápisem $(a_n)_{n\in J}$.

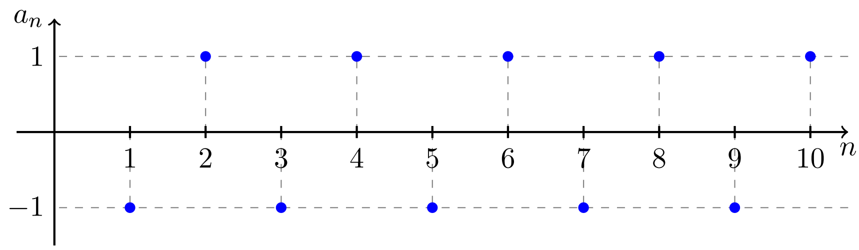
Příklad: Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Například tedy platí rovnosti $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$. Tuto posloupnost jsme mohli zadat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Oborem hodnot posloupnosti a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$. Posloupnost (a_n) má ale nekonečně mnoho členů. Posloupnost (a_n) je graficky znázorněna na obrázku 2.1.

△

[1] Závislost na diskrétních parametrech (např. celočíselných) často vyjadřujeme právě pomocí dolních indexů. Jako například u posloupností: a_n. Naopak závislost na spojitých parametrech pak většinou pomocí závorek, tj. například u reálných funkcí reálné proměnné píšeme $f(x)$.



Obrázek 2.1: Příklad posloupnosti (a_n), $a_n = (-1)^n$.

2.2 Vlastnosti posloupností

Podobně jako u funkcí, zavádíme několik typů posloupností podle vlastností jejich sousedních členů.

Definice 2.3: Posloupnost (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (a_n) je **ostře rostoucí** (resp. **ostře klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$). Posloupnost (a_n) nazýváme **monotonní** jestliže je rostoucí nebo klesající. Posloupnost (a_n) nazýváme **ryze monotonní** jestliže je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Různí autoři používají dále termín „neklesající“ místo našeho „rostoucí“ (a „nerostoucí“ v případě „klesající“). V tomto textu a v celém předmětu BI-ZMA se budeme důrazně držet názvosloví zavedeného v definici č. 2.3.

Dále se může hodit pojem konstantní posloupnosti. Patrně je jasné co si pod ním představit, ale pro úplnost si ho formálně zavedeme.

Definice 2.4: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **konstantní**, právě když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad: Rozmysleme si následující jednoduché tvrzení: posloupnost je konstantní, právě když je současně rostoucí i klesající.

Tvrzení má formu ekvivalence. K jeho důkazu proto dokážeme obě implikace.

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že máme konstantní posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, kde c je reálná konstanta. Potom jistě platí $a_{n+1} = c \geq c = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (a_n) je proto dle definice 2.3 rostoucí. Stejný argument ukazuje, že se jedná i o klesající posloupnost.

$\Leftarrow$: Naopak nyní předpokládejme, že máme posloupnost (a_n), která je rostoucí i klesající zároveň. Dle definice 2.3 tedy platí nerovnosti $a_n \geq a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je možné pouze v případě, že platí $a_n = a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak řečeno, $a_n = a_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost (a_n) je tedy konstantní. Číslo a_1 hraji roli konstanty c v definici konstantní posloupnosti. $\triangle$

Příklad: Rozmyslete si, které posloupnosti z obrázku 2.2 jsou rostoucí, klesající, ostře rostoucí, ostře klesající, či monotonní. $\triangle$

Pokud máme rozhodnout jakého (a jestli vůbec) typu zadaná posloupnost je, musíme ověřit podmínku uvedenou v definici 2.3, nebo její platnost vyvrátit. To samo o sobě může být komplikovaná úloha závisející na zadané posloupnosti. Ukažme si to na jednoduchých příkladech.

Příklad: Uvažme následující posloupnosti

a) $a_n = (n+1)^2 - n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

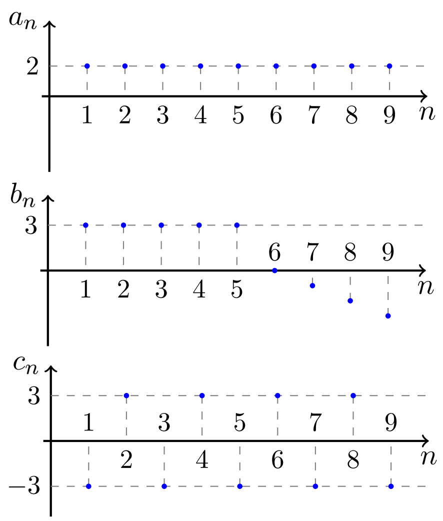
b) pro zadané $n \in \mathbb{N}$ nechť b_n označuje největší faktor v prvočíselném rozkladu čísla n,

c) $c_n = n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = 2$$

$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$

$$c_n = 3(-1)^n$$



Obrázek 2.2: Tři různé příklady posloupností.

Postupně jednotlivé případy vyřešme.

a) V prvním případě je vhodné výraz nejprve lehce upravit,

$$a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je dokonce ostře rostoucí, protože

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 > 2n + 1 = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Rozmysleme si nejprve definici posloupnosti (b_n) prozkoumáním prvních několika členů:

$$\begin{aligned} 1 = 1 &\Rightarrow b_1 = 1, \\ 2 = 2 &\Rightarrow b_2 = 2, \\ 3 = 3 &\Rightarrow b_3 = 3, \\ 4 = 2 \cdot 2 &\Rightarrow b_4 = 2. \end{aligned}$$

Vidíme, že $b_1 < b_2$, ale $b_3 > b_4$. Proto nemůže platit ani jedna z podmínek v definici č. 2.3. Uvedená posloupnost proto není (ostře) rostoucí ani (ostře) klesající.

c) Podívejme se konečně na poslední případ posloupnosti (c_n). Prvních několik členů má hodnotu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 6, \quad c_4 = 12.$$

Zdá se, že posloupnost bude ostře rostoucí. To ale *nemůžeme* tvrdit na základě porovnání jejích prvních čtyř členů! Srovnejte to se situací v předchozím odstavci, kde jsme růst/klesání vyvraceli. Nyní ho chceme prokázat, musíme proto ověřit platnost nerovnosti $a_n < a_{n+1}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. Tato nerovnost je v našem konkrétním případě ekvivalentní nerovnosti

$$n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Po jednoduchých ekvivalentních úpravách získáváme nerovnost

$$0 < 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

která je očividně pravdivá (dvojnásobek libovolného přirozeného čísla je jistě kladný). Posloupnost (c_n) je proto ostře rostoucí.

$\triangle$

Otázka 2.5: Mějme rostoucí posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Která z následujících posloupností je nutně rostoucí?

a) $(a_n + 3b_n)_{n=1}^{\infty}$

b) $(1000a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$

c) $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Aritmetická a geometrická posloupnost

Čtenáři jsou jistě dobře známy následující dva speciální příklady posloupností.

Příklad: Aritmetická posloupnost je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$, kde parametr $d \in \mathbb{R}$ se nazývá **diference**. Aby tento rekurentní vztah jednoznačně zadával posloupnost je nutné zafixovat první člen a_1. Je-li dán první člen a_1 pak očividně[2] platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aritmetická posloupnost je ostře rostoucí pokud $d > 0$, ostře klesající pokud $d < 0$ a konstantní pokud $d = 0$. $\triangle$

Příklad: Geometrická posloupnost je dána rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

kde parametr $q \neq 0, 1$ se nazývá **kvocient**. Je-li dán první člen a_1, pak je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Snadno nahlédneme, že geometrická posloupnost je ostře rostoucí pokud $a_1 > 0$, $q > 1$ nebo $a_1 < 0$, $0 < q < 1$ a ostře klesající pokud $a_1 > 0$, $0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0$, $q > 1$. $\triangle$

2.3 Limita číselné posloupnosti

V této podkapitole nejprve zavedeme pojem limity posloupnosti a pak prozkoumáme jeho základní vlastnosti. Hlavní myšlenkou je vyjádření intuitivního požadavku, aby se „členy posloupnosti a_n blížily libovolně blízko k jistému číslu α.“ Proč by nás takováto otázka měla zajímat? V praxi je často potřeba zjistit, jestli proces, který členy dané posloupnosti popisují, někam spěje (např. jestli posloupnost jistých aproximací konverguje k hledanému řešení jistého problému).

Poznamenejme, že limita není jediným nástrojem pro zkoumání chování členů posloupností pro velké indexy n. V další části tohoto textu se budeme bavit o hromadných bodech a Landauově asymptotické notaci, pomocí které budeme moci také vyjadřovat chování posloupností v ∞ (například i v situacích, kdy daná posloupnost limitu nemá).

Přistupme nyní k definici limity číselné posloupnosti.

Definice 2.6: Řekneme, že reálná posloupnost (a_n) má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$\big(\forall H_\alpha\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha\big). \tag{2.1}$$

Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými ekvivalentními způsoby:

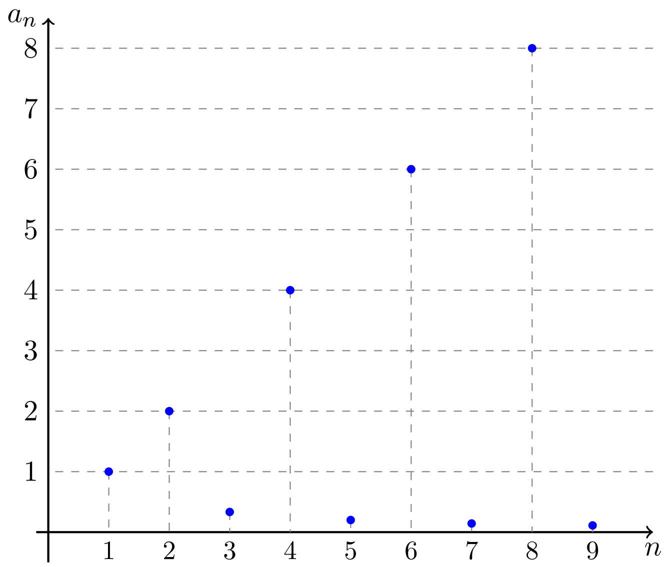
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

[2] Lze snadno dokázat pomocí matematické indukce.

Slovně můžeme definici 2.6 přeformulovat i takto: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti (a_n), právě když v každém okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek. Na druhou stranu, k tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti. Uvažte například posloupnost

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}. \end{cases} \tag{2.2}$$

V každém okolí bodu 0 leží nekonečně mnoho jejích členů, ale tato posloupnost nemůže mít limitu, protože mimo toto okolí leží taktéž nekonečně mnoho jejích členů. Prvních několik členů této posloupnosti je znázorněno na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Grafické znázornění posloupnosti (2.2).

Pokud bychom v definici limity zaměnili „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“, pak se její smysl nezmění. Význam zůstane také zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“. Index n_0 totiž vyjadřuje pouze to, že inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí pro všechna dostatečně velká n.

Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat a zbavit ji reference na pojem okolí. Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí, právě když $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy ekvivalentní formulaci definice,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ obdržíme následující tvrzení

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall c \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > c).$$

Rozmyslete si podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Nyní se budeme zabývat základními vlastnostmi zavedeného pojmu a několika jednoduchými příklady. Následující věta odhaluje veledůležitou vlastnost pojmu limity. Posloupnost buď limitu nemá, nebo ji má a její hodnota je dána jednoznačně. Jinak řečeno, žádná posloupnost nemůže mít **dvě různé** limity. Pokud tedy dva lidé počítají jeden příklad a vyjde jim rozdílný výsledek, pak alespoň jeden z nich musel někde ve výpočtu udělat chybu.

Věta 2.7 (O jednoznačnosti limity)**:** Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz sporem. Předpokládejme, že (a_n) má dvě různé limity $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \neq \beta$. Potom existují[3] dvě disjunktní okolí H_α a H_β, tj. $H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$. Z definice limity ovšem máme k dispozici $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$ a pro všechna $n > m_0$ je $a_n \in H_\beta$. Tudíž pro libovolné $n > \max\{n_0,\ m_0\}$ platí,

$$a_n \in H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$$

což je spor. □

Při počítání limit většinou (přímo) nepoužíváme definici, ale výpočet zakládáme na znalosti jednoduchých, elementárních, limit. V následujících třech příkladech si ukážeme jak definici použít právě na těchto jednoduchých posloupnostech.

Příklad: Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, je rovna α. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li jakékoliv $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

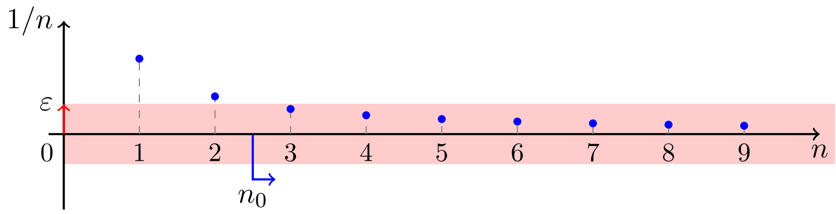
△

Příklad: Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je $+\infty$. Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0$ platí $n > n_0 > \sqrt{K}$ a tudíž $a_n = n^2 > K$. △

Příklad: Dokažte tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pro ilustraci vizte obrázek 2.4. Všimněte si, že čím menší okolí zvolíme (čím menší je ε) tím větší musíme n_0 zvolit, aby všechny členy za ním padly do zadaného okolí. △



Obrázek 2.4: Grafické znázornění posloupnosti $a_n = 1/n$ a volby n_0 pro konkrétní ε v definici limity.

Poznámka: Z předchozích tří příkladů by mělo být patrné, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Toto tvrzení je snadné[4] ověřit na základě definice stejně jako v předchozích příkladech.

Rozlišujeme následující dva důležité typy posloupností.

[3] Rozmyslete!

[4] Ovšem obecnou mocninu jsme ještě nezavedli. V tento okamžik je toto tvrzení pravdivé pouze pro $a \in \mathbb{Z}$.

Definice 2.8: Buď (a_n) posloupnost. Pokud má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

O konvergentní posloupnosti někdy také ze zjevných důvodů říkáme, že „má konečnou limitu". Na základě výsledků předchozích příkladů můžeme tvrdit následující: posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je konvergentní, libovolná konstantní posloupnost je konvergentní, posloupnost (n) je divergentní.

Shrňme si nejpodstatnější výsledek předchozích odstavců. Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti (a_n) je úspěšné provedení následujících dvou kroků.

1. Uhodni kandidáta na limitu, označme si ho $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V další části tohoto textu si ukážeme sofistikovanější nástroje pro výpočet limit. Velmi často je nám hodnota limity (pokud vůbec existuje) neznámá. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka: lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti (a_n) pouze na základě znalosti jejích členů, bez toho abychom museli operovat s hodnotou limity? Na tuto otázku zanedlouho kladně odpovíme.

2.4 Vybrané posloupnosti

V předešlé podkapitole jsme si ukázali, jak pomocí definice ověřit, že jisté $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou zadané posloupnosti (a_n). Ne všechny posloupnosti však limitu mají. Pokud máme podezření, že limita zadané posloupnosti neexistuje, můžeme se pokusit její existenci vyvrátit. Jedním ze způsobů jak vyvrátit existenci limity je „vybrat" ze zadané posloupnosti dvě „podposloupnosti" mající vzájemně různou limitu. Přesněji tento postup rozebereme v této podkapitolce. Nejprve definujme potřebné pojmy, na které jsme v tomto odstavci narazili.

Definice 2.9: Nechť (a_n) je libovolná posloupnost a (k_n) je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost (a_{k_n}) nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost (a_{k_n}) nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Poznámka: Ve výrazu a_{k_n} se vyskytuje dvojitý index. V podstatě jde o zápis složeného zobrazení. Přesně řečeno se jedná o k_n-tý člen posloupnosti (a_n). Pomocí n nejprve určíme k_n a potom a_{k_n}.

Příklad: Posloupnost (1) je vybraná z $\left((-1)^n\right)$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Posloupnost (1) není vybraná z (n) i přesto, že se člen s hodnotou 1 v posloupnosti (n) vyskytuje. $\triangle$

Na první pohled může být předešlá definice nejasná. Členy posloupnosti (k_n) pouze udávají indexy členů vybíraných z (a_n). Požadavek aby (k_n) byla ostře rostoucí znamená, že při výběru členů se nesmím vracet k předchozím členům ani nemohu vybrat stejný člen dvakrát. Pro názornost uvádíme obrázek 2.5.

Příklad: Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$ Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z (a_n). Ano, stačí volit ostře rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (2) není vybraná z (a_n). Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale (k_n) není ostře rostoucí (je konstantní s hodnotou 2). $\triangle$

Ihned vyvstává otázka jak spolu souvisí limita posloupnosti a limita její podposloupnosti? Přímo z definice limity nahlédneme platnost následující věty.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
k_n:	2	5	6	9	$\cdots$						
a_{k_n}:	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Obrázek 2.5: Vybírání podposloupnosti z posloupnosti (a_n).

Věta 2.10 (O limitě vybrané posloupnosti)**:** Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá posloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Důkaz. Pro (a_n) platí formule (2.1). Buď (k_n) libovolná ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel a $b = (a_{k_n})$ posloupnost vybraná z (a_n). Buď H_α okolí α, limity posloupnosti (a_n). Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$. Dle předpokladů o posloupnosti (k_n) ale existuje ale i m_0 takové, že $k_{m_0} > n_0$. Je-li tedy $m > m_0$ pak nutně $a_{k_m} \in H_\alpha$. Posloupnost (a_{k_n}) má tedy také limitu α. □

Příklad: Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)$ (ověřte!) a již víme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Všimněte si, jak je tento argument (využívající znalosti limity posloupnosti $(1/n)$) jednoduchý. Není potřeba přímo ověřovat podmínku v definici limity (pro ε hledat n_0 s požadovanými vlastnostmi). △

Věta 2.10 nám dává jednoduché a užitečné kritérium pro neexistenci limity posloupnosti. Zformulujeme si ho jako následující důsledek.

Důsledek 2.11: Lze-li z posloupnosti (a_n) vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti (a_n) neexistuje.

Důkaz. Důkaz důsledku je zřejmý. Sporem. Kdyby posloupnost (a_n) měla limitu a šlo z ní vybrat dvě podposloupnosti s různými limitami, pak se ihned dostáváme do sporu s větou o limitě vybrané podposloupnosti (věta 2.10). □

Příklad: Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje. Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n - 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

△

2.5 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

V předchozí kapitole jsme zavedli rozšířenou reálnou osu, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Nyní mezi prvky $\overline{\mathbb{R}}$ rozšíříme binární operace sčítání a násobení.

Nejprve ale připomeňme, že přirozeným způsobem na $\overline{\mathbb{R}}$ rozšiřujeme i porovnání (uspořádání). Konkrétně platí

$$\begin{aligned} -\infty < a \quad &\text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ a < +\infty \quad &\text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \end{aligned}$$

Nyní se věnujme algebraickým operacím.

Definice 2.12: Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$. V závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nedefinovány zůstávají výrazy

$$\pm\infty - \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Symboly $\pm$ je ve stejném řádku je nutno chápat tak, že vždy horní a dolní znaménko si odpovídá. Přesněji, výraz $\pm\infty - \pm\infty$ je zkratka pro dva výrazy: $+\infty - (+\infty)$ a $-\infty - (-\infty)$, **ne** pro $+\infty - (-\infty)$. Výraz $+\infty - (-\infty)$ je dobře definovaný a jeho hodnota je $+\infty$. Tento posledně uvedený výraz je definován a jeho hodnota je $+\infty$.

Příklad: Platí tedy například $+\infty - 2 = +\infty$, $4 \cdot (-\infty) = -\infty$, $\frac{2}{+\infty} = 0$ a podobně. Výrazy $\frac{4}{0}$, $+\infty - (+\infty)$, či $0 \cdot (+\infty)$ **nejsou** definovány. Jak uvidíme, nelze jim dát dobrý obecný smysl. $\triangle$

2.6 Věty o limitách

Následující věty nám umožňují „kombinovat“ jednoduché limity do složitějších, jsou tedy velmi praktickým nástrojem pro výpočet limit.

Věta 2.13: Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Všimněte si, že aby podíl $\frac{\alpha}{\beta}$ byl definován, musí být $\beta \neq 0$. Za chvilku uvidíme, že odtud plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti (a_n/b_n).

Důkaz této věty je poněkud zdlouhavý, vzhledem k množství kombinací různých situací. Uveďme alespoň argument pro součet a konečné limity. Ostatní případy lze ošetřit podobně i když například podíl a součin vyžadují více práce.

Důkaz pro součet a konečné limity. Předpokládejme, že $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ potom lze pro $\varepsilon/2$ najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ a $|b_n - \beta| < \varepsilon/2$. Pro tato n pak máme i

$$|a_n + b_n - \alpha - \beta| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle definice tedy $a_n + b_n \to \alpha + \beta$. □

Všimněme si, že ve větě se existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$ předpokládá. Opačná tvrzení obecně neplatí, například z existence limity $\lim(a_n + b_n)$ neplyne existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$. Jako příklad můžeme uvést následující jednoduchou volbu posloupností:

$$a_n = (-1)^n \quad \text{a} \quad b_n = (-1)^{n+1}.$$

Protože $a_n + b_n = 0$ platí pro každé n, existuje limita součtu, ale limita původních posloupností neexistuje, jak jsme již ukázali dříve.

Uveďme dále jeden důležitý důsledek věty 2.13.

Důsledek 2.14: Buď $c \in \mathbb{R}$ konstanta a (a_n), (b_n) posloupnosti s limitami v $\overline{\mathbb{R}}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Důkaz. V případě prvního tvrzení důsledku stačí využít větu 2.13 a její tvrzení o součinu s posloupností (a_n) a konstantní posloupností $b_n = c$. K nahlédnutí druhého tvrzení si pak stačí uvědomit, že $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$ a použít první část důsledku a větu 2.13 o součtu. □

Ukažme si, jak lze předchozí věty použít při výpočtu jednoduchých příkladů.

Příklad: Vypočtěte

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Je potřeba použít předchozí větu, ale před tím je třeba výrazy za limitou vhodně upravit. V prvním příkladě platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1} = -2.$$

Všimněte si, že předchozí větu jsme použili hned několikrát (podíl limit, výpočet limity čitatele a jmenovatele pomocí součtu/rozdílu limit).

V druhém příkladě podobně máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - n} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - \infty} = 0.$$

A konečně ve třetím

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{+\infty - 0 + 0}{0 - 1} = -\infty.$$

Samozřejmě způsobů jak provést úpravu těchto typů zlomků, tak aby bylo možné použít větu na podíl/součin/součet limit, je více možných. △

Další věta nám ukazuje, jak se chová absolutní hodnota vůči limitě.

Věta 2.15: Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\alpha|,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

Důkaz. Dokažme nejprve první část. Pokud $\alpha = \pm\infty$, pak je důkaz přímočarým použitím definice.

Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \tag{2.3}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu platí $|a + b| \leq |a| + |b|$ pro reálná a, b. Položíme-li $a = x - y$ a $b = y$, pak

$$|x| \leq |x - y| + |y| \quad\Longrightarrow\quad |x| - |y| \leq |x - y|. \tag{2.4}$$

Záměnnou x za y a y za x pak

$$|y| - |x| \leq |y - x| \quad\Longrightarrow\quad |x| - |y| \geq -|x - y|. \tag{2.5}$$

Nerovnosti (2.4) a (2.5) lze souhrnně zapsat jako nerovnost (2.3).

Uvažme $\alpha \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$. Potom dle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé n větší než n_0 je $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Díky výše odvozené nerovnosti pak ale pro tato n platí i $\big||a_n| - |\alpha|\big| < |a_n - \alpha| < \varepsilon$. První část tvrzení je tímto dokázána.

Ekvivalence v druhé části plyne z rovnosti

$$|x - 0| = \big||x| - 0\big|$$

platné pro každé reálné x. □

Příklad: Předchozí věta tedy říká, že můžeme beztrestně zaměňovat pořadí počítání limity a absolutní hodnoty. Například

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n} - 2\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right)\right| = |-2| = 2. \qquad \triangle$$

Věta 2.16: Nechť (a_n) je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Důkaz. Uvažme případ $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Podle předpokladů existuje konstanta $c > 0$ tak, že $c < a_n$ pro každé n a $c < \alpha$. Dále si stačí povšimnout, že[5]

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\alpha + \cdots + a_n\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}} \leq \frac{|a_n - \alpha|}{k \cdot c^{k-1}}.$$

[5]Zde jsme využili známého vzorce

$$x^n - y^n = (x - y)\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}$$

platného pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Je-li tedy $\varepsilon > 0$ zadáno libovolně, pak lze podle předpokladů nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon c^{k-1}}{k}$. Potom ale podle nerovnice výše je

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}| < \varepsilon.$$

Uvažme případ $\alpha = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pro ε^k existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pokud je n větší než n_0 platí $0 \leq a_n < \varepsilon^k$. Pro tato n je pak ale i $0 \leq \sqrt[k]{a_k} < \varepsilon$. Čili $\left(\sqrt[k]{a_k}\right)$ konverguje k 0.

Případ $\alpha = +\infty$ se vyšetří analogicky. □

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n.$$

Všimněte si, že nelze použít větu o limitě součtu. Dostáváme nedefinovaný výraz $+\infty - (+\infty)$. Skutečně, protože $\lim_{n\to\infty} n^2 + 2n + 5 = +\infty$ pak podle předchozí věty (konkrétně věty 2.16) platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} = +\infty$. K výpočtu naší limity použijeme úpravu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} = 1.$$

Zde jsme v poslední kroku využili předchozí věty. Konkrétně

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1. \qquad \triangle$$

2.7 Kritéria konvergence posloupností

V této kapitole se budeme zabývat způsoby jak rozhodnout o konvergenci posloupností. Nejprve si ukážeme důležitá kritéria pro existenci konečné limity nevyžadující její *a priorní* znalost.

Připomeňme si z dřívější přednášky axiom úplnosti reálných čísel. Nyní již navíc můžeme podmínku, kladenou na délky intervalů, formulovat pomocí pojmu limity.

Poznámka (Axiom úplnosti)**:** Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\begin{aligned} \langle a_n, b_n \rangle &\supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) &= 0, \end{aligned}$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Jak již bylo zmíněno, takovéto x může být očividně nejvýše jedno (opět rozmyslete!). Předpokládáme-li existenci dvou různých prvků x a y, ležících v průniku, snadno se dostaneme ke sporu.

Než se pustíme do hlavní části této sekce zaveďme názorný pojem omezené posloupnosti.

Definice 2.17: Posloupnost (a_n) nazveme **omezenou**, právě když existuje $K > 0$ taková, že $|a_n| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Například posloupnost $(\sin n)$ je omezená (za K lze zvolit například číslo 2), ale posloupnost (n) není omezená.

Dále si zaveďme ještě pojem hromadného bodu, který úzce souvisí s pojmem limity a který budeme dále využívat nejen v této kapitole.

Definice 2.18: Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem**[6] posloupnosti (a_n), právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti? Pokud má posloupnost (a_n) limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ pak je tato i hromadným bodem posloupnosti (a_n). Na rozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $((-1)^n)$ má hromadné body 1 a -1, ale jak už víme nemá limitu.

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnosti popisuje následující věta.

Věta 2.19: Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti (a_n), právě když existuje vybraná posloupnost (a_{k_n}) mající limitu α.

Důkaz. $\Leftarrow$: V každém okolí H_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_{k_n}) a tím pádem i posloupnosti (a_n).

$\Rightarrow$: Uvažme okolí $H_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in H_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pak pro okolí $H_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in H_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost (a_{k_n}) je vybraná z (a_n) a konverguje k α. □

Přistupme nyní k důležité větě nesoucí jméno po Bernardovi Bolzanovi (matematik pocházející z itálie ale studující v Praze, 1781 - 1848) a Karlovi Weierstrassovi (německý matematik, otec moderní matematické analýzy, 1815 - 1897). Její tvrzení není vůbec očividné a jak uvidíme v důkazu, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel.

Věta 2.20 (Bolzano-Weierstrass)**:** Každá omezená číselná posloupnost má konečný hromadný bod.

Důkaz. Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.

Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů (a_n) a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do každého z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí H_x bodu x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n \rangle$ patřil do H_x. Proto lze v H_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) a x je tedy hromadným bodem (a_n). □

Poznámka: Jinak řečeno, z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Následující větu budeme velmi často využívat. Dává nám totiž **postačující podmínku** pro konvergenci posloupnosti. Pokud ověříme tuto podmínku (v tomto případě monotonii a omezenost posloupnosti) pak je **zaručena** existence její konečné limity. Jak je patrné z důkazu, jedná se o důsledek předchozí Bolzano-Weierstrassovy věty.

Věta 2.21 (O limitě monotonní posloupnosti)**:** Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

[6] Zkrátka je to bod, kde se členy posloupnosti (a_n) hromadí.

Důkaz. V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko + pro neomezenost shora, − pro zdola).

Předpokládejme, že (a_n) je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost (a_n) hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_{n_0} patřící do H_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > n_0$, protože pro ně nutně platí $a_n \leq x$. Kdyby totiž a_n přerostlo x, nemohl by x být hromadným bodem (a_n). □

Příklad (Limita posloupnosti harmonických čísel)**:** Zkoumejme limitu posloupnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}. \tag{2.6}$$

Této posloupnosti se pro její důležitost budeme věnovat ještě dále v semestru. Nyní si ukážeme jak je to s její limitou. Na první pohled se může zdát překvapivé, že limita této posloupnosti je $+\infty$.

Tato posloupnost je očividně ostře rostoucí (následující člen vznikne z předchozího přičtením kladného čísla). Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost (b_n), a tedy i (a_n), není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$ △

Další věta nám dává **nutnou** a **postačující** podmínku pro konvergenci posloupnosti. Tedy podmínku ekvivalentní s definicí. Podstatnou výhodou této podmínky je, že vyžaduje pouze znalost členů zkoumané posloupnosti, nepotřebujeme se odvolávat na případnou hodnotu limity (srovnejte s definicí 2.6).

Věta 2.22 (Bolzano-Cauchy)**:** Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$. Nechť má (a_n) limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. □

Důkaz $\Leftarrow$. Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{a_{n_0}}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost (a_n) je proto omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti (a_n).

Buď $H_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje n_0 tak, že pokud $m, n > n_0$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > n_0$ tak, že $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > n_0$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ □

Příklad: Vraťme se ještě jednou k posloupnosti harmonických čísel 2.6. Ukažme, že její limita je nekonečno alternativně pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria. Nejprve si opět povšimneme, že zkoumaná posloupnost (b_n), $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, je rostoucí a tedy má limitu. Dokažme, že tato limita nemůže být konečná (tj. nemůže patřit do $\mathbb{R}$) a proto musí být nutně rovna $+\infty$. K tomu použijeme Bolzano-Cauchyova kritéria, chceme ukázat jeho negaci. Tedy

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, m \in \mathbb{N})(n, m > n_0 \text{ a } |b_n - b_m| \geq \varepsilon),$$

kde (b_n) je zkoumaná posloupnost. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a buď $n_0 \in \mathbb{N}$ libovolné. Položme $n = 4n_0$ a $m = 2n_0$, potom $n > m > n_0$ a

$$|b_n - b_m| = \sum_{k=2n_0+1}^{4n_0} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4n_0} \cdot 2n_0 = \frac{1}{2}.$$

V odhadu jsme použili jednoduchého pozorování: součet $N \in \mathbb{N}$ kladných čísel je větší nebo roven nejmenšímu z nich krát N. △

2.8 Nerovnosti a limity

Z nerovnosti mezi limitami lze odvodit nerovnost mezi členy posloupnosti a naopak z nerovnosti mezi členy posloupnosti lze odvodit nerovnost mezi jejich limitami. Hlavním výsledkem této podkapitolky je věta o sevřené posloupnosti, kterou s výhodou využíváme, pokud není možné využít věty o součtu, součinu, či podílu limit.

Věta 2.23: Nechť reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

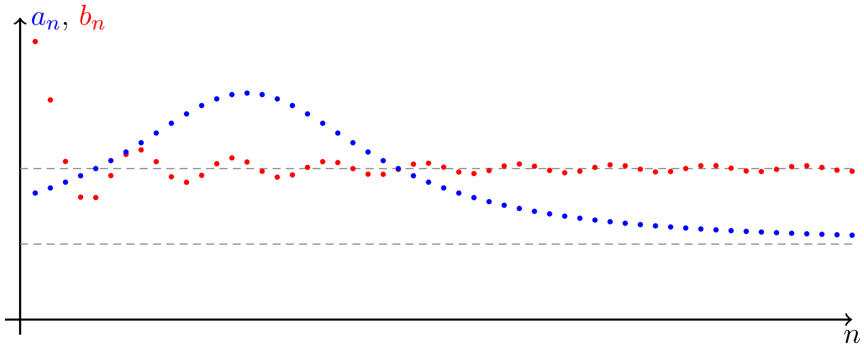
potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.

Důkaz. Označme $\alpha = \lim a_n$ a $\beta = \lim b_n$, platí $\alpha < \beta$. Předpokládejme, že α i β jsou konečná. Potom pro $\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha(\varepsilon)$ a $b_n \in H_\beta(\varepsilon)$. Protože jsou tato okolí disjunktní platí jistě navíc pro tato n nerovnost $a_n < b_n$.

Podobným způsobem snadno ověříme i případ kdy jsou α či β nekonečná. □

Příklad: Jako příklad uvažme $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ a $b_n = 1 + \frac{2}{n}$. Jejich limity jsou $\lim a_n = 2$ a $\lim b_n = 1$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n > n_0$ přirozené platí $a_n > b_n$. V našem případě lze za n_0 volit číslo 4. △

Důsledek 2.24: Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.



Obrázek 2.6: Ilustrace k větě 2.23

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností (a_n) a (b_n). □

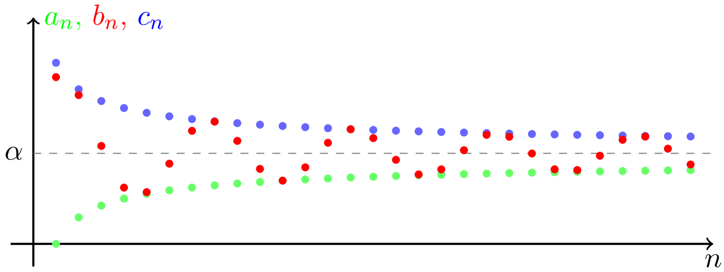
Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Nyní se dostáváme k velmi důležité větě, kterou často použijeme. Její myšlenka spočívá v tom, že dokážeme-li „dobře vystihnout" chování dané posloupnosti pomocí posloupností se známými shodnými limitami, pak známe i limitu zkoumané posloupnosti.

Věta 2.25 (O sevřené posloupnosti)**:** Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0)(a_n \leq b_n \leq c_n)$
2. posloupnosti (a_n) a (c_n) mají stejnou limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim b_n = \alpha$.



Obrázek 2.7: Ilustrace k větě 2.25.

Důkaz. Buď H_α okolí bodu α. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m_0$ patří jak a_n tak c_n do H_α. Pro $n > \max\{n_0, m_0\}$ do tohoto okolí musí patřit i b_n, protože $a_n \leq b_n \leq c_n$. Proto má posloupnost (b_n) limitu rovnou α. □

Příklad: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$. Funkce sin má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ je podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \qquad \triangle$$

Příklad: Pokud zkoumáme posloupnost o které máme podezření, že její limitou je $+\infty$, pak nám stačí udělat odhad pouze z jedné strany, zespoda. Skutečně. Uvažme například posloupnost

$$a_n = (2 + (-1)^n)n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vzhledem ke kladnosti a omezenosti závorky očekáváme, že limitou bude $+\infty$. Nelze ale použít větu o limitě součinu, protože limita závorky neexistuje. Každý člen posloupnosti ale můžeme odhadnout zespoda takto,

$$a_n = (2 + (-1)^n)n \geq (2 - 1)n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti (n) víme, že její limitou je $+\infty$. Odtud ihned plyne (prakticky hned z definice), že limitou naší posloupnosti je také $+\infty$. $\triangle$

2.9 Příklady

V této podkapitole vypočteme několik základních limit, které se často hodí znát při výpočtech. V předešlé části textu jsme totiž odvodili několik vět, které však v podstatě nelze použít, neznáme-li limity aspoň některých jednoduchých posloupností.

Připomeňme, že hned po zavedení pojmu limity posloupnosti jsme si prakticky odvodili nejelementárnější limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Přistupme nyní k dalším příkladům.

Příklad: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. $\triangle$

Příklad: Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- Případ $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

  V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- Případ $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \qquad \triangle$$

Příklad: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém" pořadí:

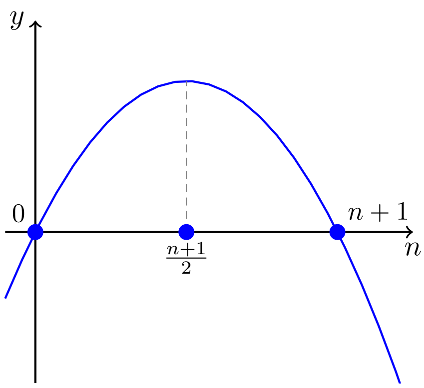
$$\begin{aligned}
(n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \\
&= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdots (n \cdot 1) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)
\end{aligned}$$

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé (vizte obrázek 2.8), že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty. \qquad \triangle$$



Obrázek 2.8: Ilustrace k výpočtu příkladu výpočtu limity posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$.

Příklad (!!!): Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

- Jednoduché případy: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $((-1)^n)$ neexistuje.
- Nechť $0 < |a| < 1$. Platí
$$|a^{n+1}| = |a^n| \cdot |a| < |a^n|.$$
Posloupnost $\big(|a^n|\big)$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < |a^n| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} |a^n|$.

  Posloupnost $\big(|a^{n+1}|\big)$ je vybraná z $\big(|a^n|\big)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně
$$L = \lim_{n\to\infty} |a^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot |a^n| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} |a^n| = |a| \cdot L.$$
Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.
- Případ $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že (a^n) je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí
$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$
Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.
- Případ $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $(a^{2n}) = \big((a^2)^n\big)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

  Limitu vybrané posloupnosti $(a^{2n+1}))$ snadno spočteme
$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$
  Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje. △

Shrňme si doposud odvozené limity v tabulce 2.1.

2.10 Podílové kritérium

Následující kritérium je nedocenitelné při počítání některých „očividných" limit posloupností. Podívejme se například na limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}. \tag{2.7}$$
Zamysleme se nad tvarem členů této posloupnosti. Jedná se o podíl polynomu (v čitateli) a exponenciály o základu větším než 1 (ve jmenovateli). Pokud si člověk představí grafy těchto

posloupnost	limita
(n^a)	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$(\sqrt[n]{n})$	1
$(\sqrt[n]{a})$ pro $a > 0$	1
$(\sqrt[n]{n!})$	$+\infty$
(a^n)	$\begin{cases} 0, & \lvert a \rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Tabulka 2.1: Známé posloupnosti a jejich limity.

posloupností, ihned získá dojem, že „exponenciála[7] ve jmenovateli roste daleko rychleji“ než polynom v čitateli. Tušíme tedy, že pro velká n bude tento podíl velmi malý. Intuitivně tedy očekávali, že limita (2.7) existovat a bude rovna nule.

Bohužel, úvaha v předchozím odstavci má hliněné nohy, je to pouze naše domněnka. Mohli bychom se proto pokusit dokázat pomocí definice, že limita v rovnici (2.7) je rovna nule (zkuste!). Na tomto místě zvolíme ale jiný postup, který se nám bude hodit i v dalších příkladech. Platí totiž následující věta.

Věta 2.26 (Podílové kritérium)**:** Buď (a_n) posloupnost kladných čísel a nechť

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \tag{2.8}$$

Potom

a) pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

b) pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Proveďme důkaz bodu a). Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Dle věty 2.23 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n > n_0$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < r a_n$ pro libovolné $n > n_0$. To ovšem znamená, že pro $n > n_0$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-n_0-1} a_{n_0+1}.$$

[7]Exponenciála *o základu větším* než 1.

Protože $0 < r < 1$ je limita pravé strany nerovnosti rovna nule (viz příklad v předchozí podkapitole). Dle věty o limitě sevřené posloupnosti (věta 2.25) pak ihned dostáváme kýžený výsledek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bod b) se dokáže naprosto analogicky. □

Aplikujme podílové kritérium na příklad uvedený na začátku této podkapitoly.

Příklad: Vypočtěme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Pro limitu podílů platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Podle podílového kritéria proto původní limita konverguje k nule. △

Poznámka: První bod věty 2.26 lze relativně snadno formulovat i pro některé posloupnosti nemající pouze kladné členy. Stačí použít větu 2.15. Skutečně, pokud pomocí podílového kritéra zjistíme, že posloupnost s nezápornými členy $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, pak k nule konverguje i posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka: Pokud limita podílů vyjde rovna 1, pak podílové kritérium nelze použít. Například pro posloupnost (n) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Avšak pro limitu $(1/n)$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Poznámka: Podílové kritérium jsme ve větě 2.26 formulovali v tzv. limitním tvaru. Z důkazu je zřejmé, že platí i silnější nelimitní verze: Jestliže pro posloupnost kladných čísel (a_n) existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1$$

pro každé $n > n_0$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Poznámka: Existují i další kritéria konvergence posloupností (např. Raabeovo, Cauchyovo), kterými se zde přímo nabudeme zabývat.

2.11 Úvod do Landauovy symboliky

K vyjádření rychlosti růstu posloupnosti, či porovnání rychlosti růstu dvou posloupností, se často využívá Landauova[8]symbolika (též známá pod označením $\mathcal{O}$-notace). S touto symbolikou se velmi často setkáte při vyjadřování časových a paměťových složitostí algoritmů.

V této krátké kapitole zavedeme dva základní asymptotické vztahy, vlnovku $\sim$ a velké $\mathcal{O}$. Přesná definice těchto symbolů je následující.

[8] Edmund Landau, německý matematik, 1877 – 1938.

Definice 2.27: Nechť (a_n) a (b_n) jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, když existuje posloupnost (α_n) a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n > n_0.$$
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n > n_0.$$

Jestliže $a_n \sim b_n$, pak se pro velká n obě posloupnosti „chovají stejně“, jsou tzv. asymptoticky ekvivalentní. Speciálně platí, že pokud $a_n \sim b_n$, pak $\lim a_n = \alpha$ právě když $\lim b_n = \alpha$.

Poznámka: Ačkoliv jsme relace nezavedli poznamenejme, že $\sim$ je skutečně relací ekvivalence na množině všech posloupností.

Tvrzení $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ naopak říká, že (a_n) neroste (v absolutní hodnotě) rychleji než (b_n) pro velká n. $\mathcal{O}$ je tedy značně *hrubší* než $\sim$.

Otázka 2.28: Pro dvě posloupnosti (a_n) a (b_n) dokažte implikaci: pokud $a_n \sim b_n$, potom $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.

Pokud nerovnost $b_n > 0$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pak lze definici uvedenou výše přeformulovat do následujícího, často používaného, tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{2.9}$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ je omezená.} \tag{2.10}$$

Omezení se na nezáporné posloupnosti není pro naše účely příliš omezující. Často narazíme na vyjadřování a porovnávání složitostí algoritmů, které jsou typicky popsány kladnými čísly (nemáme zápornou paměť nebo počet operací). Výše uvedené kritérium se tedy často hodí a necháváme ho čtenáři k rozmyšlení (tj. k dokázání).

V předchozí podkapitole jsme vypočetli limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Posloupnost $(n^2/2^n)$ je tedy omezená. V notaci zavedené výše to znamená, že

$$n^2 = \mathcal{O}(2^n).$$

Demonstrujme dále výše zavedené pojmy a tvrzení na několika jednoduchých příkladech.

Příklad: Platí $50 \sin n = \mathcal{O}(1)$. Skutečně, stačí použít přímo definici $\mathcal{O}$. Dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|50 \sin n| \leq 50 \cdot 1.$$

Za konstantu v definici tedy lze vzít číslo 50. △

Příklad: Platí $500n = \mathcal{O}(n^2)$. Opět použijeme definici $\mathcal{O}$, resp. alternativní formulaci (2.10). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{500n}{n^2} = \frac{500}{n} \leq 500.$$

Posloupnost $(500n/n^2)$ je tedy omezená, jak jsme chtěli dokázat. △

Příklad: Platí

$$\frac{n^2+n}{n^3+n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Opět použijme tvrzení (2.10). Snadno vypočteme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n}{n^3+n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3+n^2+n+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1+0}{1+0+0+0} = 1.\end{aligned}$$

A tvrzení tedy platí. △

Příklad: Necháváme čtenáři k ověření, že dále například platí

$$\begin{aligned} n^2+\frac{1}{2}n-1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n\sin n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

△

Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se. Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.

Všimněte si, že omezenost posloupnosti (a_n) lze nyní snadno vyjádřit formulkou $a_n = \mathcal{O}(1)$. Skutečně, dle definice existuje jistá konstanta $c > 0$ a index $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $|a_n| \le c$ pro každé $n \ge n_0$. Odtud již snadno plyne omezenost posloupnosti (a_n).

Kapitola č. 3

Číselné řady

Číselné řady; konvergence a součet řady; nutná podmínka konvergence; Bolzano-Cauchyovo kritérium; Leibnizovo kritérium; srovnávací kritérium; d'Alembertovo kritérium; Eulerovo číslo; exponenciální funkce; přirozený logaritmus; obecná mocnina.

3.1 Definice číselné řady

V této části se budeme zabývat speciálním typem číselných posloupností, číselnými řadami. Řady vznikají postupným sčítáním členů zadané posloupnosti. Začněme nejprve definicí.

Definice 3.1: Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots ,$$

kde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. Součtem konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Konvergence řady se zachová, změníme-li konečný počet členů řady. Speciálně konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ pro libovolně zvolené $n_0 \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Je důležité rozlišovat mezi pojmy „posloupnost" a „řada". Častou studentskou chybou je vzájemné pletení a nepochopení těchto pojmů. Například posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, je dobré si představovat jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots$$

a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro stejnou posloupnost (a_n) jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ \ldots$$

Příklad: Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{3.1}$$

konverguje. Skutečně, členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{3.2}$$

Takže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. V závislosti na q proto součet můžeme vyjádřit následovně

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Poznamenejme, že z rovnice (3.2) také plyne divergence řady (3.1) pro $q > 1$ nebo $q \leq -1$. Pokud $q = 1$, pak lze také snadno ověřit, že diverguje. △

Příklad: Uvažujme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d. Snadno spočteme částečné součty jako

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada je tedy konvergentní, právě když $a_1 = d = 0$. △

3.2 Kritéria konvergence číselných řad

O některých řadách můžeme rovnou rozhodnout, že divergují, aniž bychom složitě zkoumali jejich částečné součty. Máme totiž k dispozici následující větu a její důsledek.

Věta 3.2 (Nutná podmínka konvergence)**:** Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, *potom* pro limitu sčítanců platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz. Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady a (s_n) posloupnost jejích částečných součtů. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ dostáváme z věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Důsledek 3.3: Pokud limita posloupnosti $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je nenulová nebo neexistuje, *potom* řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ není konvergentní.

Příklad: O řadách

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+3},$$

můžeme ihned tvrdit, že divergují, protože (popořadě)

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (-1)^k \text{ neexistuje}, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+3} = 1.$$ △

Podmínka ve větě 3.2 je pouze nutná. Pokud sčítanci konvergují k nule, tak nemůžeme tvrdit, že řada konverguje. Toto je častý omyl jak nám navíc ukazuje následující příklad.

Příklad: Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$ Víme již, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty (s_n) platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje. △

K odvození dalších kritérií pro testování konvergence řad budeme opět potřebovat Bolzanovo-Cauchyovo kritérium pro řady.

Věta 3.4 (Bolzano-Cauchy)**:** Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Jedná se pouze o použití Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. □

Všimněte si, že má-li řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nezáporné členy, pak je posloupnost jejích částečných součtů monotónní (vzpomeňte na větu o limitě monotónní posloupnosti 2.21). Víme tedy, že tato řada buď konverguje, nebo je limita jejích částečných součtu rovna $+\infty$. Máme-li řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ s členy různých znamének, pak je přirozené ptát se, v jakém vztahu je její konvergence vzhledem k řadě $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, která má už nezáporné členy.

Definice 3.5: Číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud číselná řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Absolutní konvergence řady implikuje konvergenci řady. Skutečně, platí následující věta.

Věta 3.6: Pokud řada absolutně konverguje, potom tato řada konverguje.

Důkaz. Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéra pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. □

Poznamenejme, že řady které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, jsou citlivé na změnu pořadí sčítání členů. Jinak řečeno, u absolutně konvergentní řady nezáleží na pořadí, v jakém členy sčítáme, výsledek bude vždy stejný. Tak tomu ale není u řad které konvergují neabsolutně. Blíže se této problematice na tomto místě věnovat nebudeme.

Věta 3.7 (Leibniz[1])**:** Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost s nezápornými členy konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergentní.

Důkaz. Důkaz Leibnizova kritéria vynecháváme. Plyne z Dirichletova kritéria, které jsme si ani nevyslovili, natož dokázali. □

Příklad: Příkladem konvergentní řady, která ale není absolutně konvergentní, je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Skutečně, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria, protože posloupnost $(1/k)$ má kladné členy a monotónně konverguje k nule. Řada z absolutních hodnot členů je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, o které již víme, že diverguje. △

[1] Gottfried Leibniz, německý matematik, 1646 – 1716.

Kritéria, která dále vyslovíme, jsou prakticky použitelná k ověřování absolutní konvergence řad. Začněme nejprve srovnávacím kritériem.

Věta 3.8 (Srovnávací kritérium)**:** Buďte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

i) Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

ii) Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz bodu i). Opět použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu věty 3.6. Tvrzení opět plyne z následujícího odhadu,

$$\big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|\big| = |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}. \quad \square$$

Důkaz bodu ii). Dle předpokladu víme, že

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$$

a limita levé strany je $+\infty$. Odtud ihned plyne (v podstatě definice limity posloupnosti), že i posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=0}^{\infty}$ diverguje. $\square$

Již víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Tohoto faktu s výhodou využijeme v důkazu následující věty.

Věta 3.9 (d'Alembertovo[2] kritérium)**:** Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Potom platí následující dvě tvrzení:

i) Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$
potom řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje.

ii) Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$
potom řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Důkaz tvrzení i). Za uvedeného předpokladu z podílového kritéria (věta 2.26) pro posloupnost (a_k) plyne
$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$
Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (věta 3.2) a tato je proto divergentní. $\square$

[2] Jean d'Alembert, francouzský matematik, 1717 – 1783.

Důkaz tvrzení ii). Označme

$$\tilde{q} := \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Dle našich předpokladů platí $0 \leq \tilde{q} < 1$. Uvažme libovolné q splňující $\tilde{q} < q < 1$. Věta 2.23 implikuje existenci $k_0 \in \mathbb{N}$ takového, že je-li $k \geq k_0$ pak platí nerovnost $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$. Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Podle srovnávacího kritéria (věta 5.17) tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

Poznamenejme, že d'Alembertovo kritérium zdaleka není všemocné. Například o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ víme, že diverguje. Ovšem pro limitu podílů platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1.$$

D'Alembertovo kritérium tedy o konvergenci, resp. divergenci, této konkrétní řady **nerozhodne**. Dokonce nerozhodne ani o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} k$.

Existují další kritéria pro vyšetřování konvergence číselných řad (Cauchyovo, Gaussovo, Dirichletovo, Abelovo, aj.). V poslední části přednášky odvodíme ještě integrální kritérium.

Příklad: Zkoumejme konvergenci řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{1000}}{2^k}.$$

Řada má kladné sčítance, můžeme se proto pokusit použít d'Alembertovo kritérium. Musíme vypočíst hodnotu následující limity

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{1000}}{2^{k+1}}}{\frac{k^{1000}}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot (1+0)^{1000} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$ a řada má kladné členy d'Alembertovo kritérium nám umožňuje tvrdit, že zadaná řada je (absolutně) konvergentní. △

Přistupme nyní k první aplikaci číselných řad. Pomocí číselné řady můžeme dát přirozený význam nekonečnému desetinnému číselnému rozvoji. Číselné řady budou hrát důležitou roli i v následující kapitole o Eulerově čísla a i později při výkladu o Taylorových řadách.

Příklad (Desetinný rozvoj)**:** Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně[3] definuje jisté reálné číslo. Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

a řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje. △

K další zajímavé aplikaci se dostaneme hned v následující kapitole. V další části textu pak na řady narazíme při výkladu o Taylorových řadách. Zjistíme, že vlastně všechny elementární funkce, které znáte ze středních škol, lze definovat jako jisté číselné řady!

[3] Viz větu 2.7.

3.3 Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

V této kapitole se budeme podrobně věnovat exponenciální funkci, která představuje jednu z nejdůležitějších matematických funkcí. Dále zavedeme Eulerovo[4] číslo. Jak uvidíme, oba tyto matematické objekty stojí na pojmu číselné řady, který jsme zavedli v předcházející sekci.

Pro každé reálné x uvažme číselnou řadu[5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{3.3}$$

Pomocí d'Alembertova kritéria (věta 3.9) se snadno přesvědčíme o absolutní konvergenci této řady. Pro $x = 0$ řada očividně absolutně konverguje. Pro $x \neq 0$ pro limitu podílů platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ konverguje a tudíž řada (3.3) konverguje absolutně pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Výraz (3.3) má tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ jednoznačný smysl jakožto reálné číslo.

Po těchto počátečních úvahách můžeme přejít k formální definici exponenciální funkce.

Definice 3.10: Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje součet konvergentní řady (3.3), nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu v bodě x značíme symbolem e^x. Platí tedy

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi funkce definované tímto vztahem. Ukážeme, že splňuje všechny vztahy, které bychom od exponenciální funkce očekávali.

Věta 3.11 (Základní vlastnosti exponenciální funkce)**:** Exponenciální funkce oplývá následujícími vlastnostmi:

i) $e^0 = 1$,

ii) pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $e^{x+y} = e^x e^y$,

iii) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x > 0$ a dále $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

iv) exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $e^x < e^y$.

Důkaz. *i)* Plyne přímo z dosazení $x = 0$ do definičního vztahu (3.4),

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

[4] Leonhard Euler, švýcarský matematik, 1707 – 1783.

[5] Používáme algebraickou konvenci $0^0 = 1$.

ii) Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom[6]

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot e^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.
\end{aligned}
$$

iii) Z předchozích, již dokázaných, bodů *i)* a *ii)* plyne rovnost

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \tag{3.5}$$

platná pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Tato rovnost implikuje nenulovost e^x pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (můžeme argumentovat sporem: kdyby $e^x = 0$ pro jisté $x \in \mathbb{R}$, pak z odvozené rovnosti dostáváme $0 = 1$, což je spor). Z rovnosti (3.5) pak ihned dostáváme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Buď dále $x > 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1.$$

Předpoklad $x > 0$ je zde podstatný, díky němu víme, že posloupnost částečných součtů konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ je ostře rostoucí a její součet proto můžeme ostře zdola odhadnout prvním členem posloupnosti částečných součtů, což je číslo 1.

Kýženou nerovnost $e^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ nyní snadno ukážeme sporem. Kdyby $e^x < 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, které by podle předchozích úvah již nutně muselo být záporné, pak by $-x > 0$ a tudíž $1 < e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 0$, což je spor.

iv) Uvažujme $z > 0$. Nerovnost $e^z > 1$ odvozená v důkazu předchozího bodu dále implikuje, že pro *záporné* z platí

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} < 1.$$

Je-li nyní $0 \leq x < y$, pak $e^y = e^{y-x} e^x > 1 \cdot e^x = e^x$, protože $y - x > 0$. Odtud dále plyne, že pro $x < y \leq 0$ platí

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} < \frac{1}{e^{-y}} = e^y.$$ □

Povšimněme si, že z důkazu bodu *iv)* ihned plyne, že $e^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pomocí exponenciální funkce můžeme přirozeně definovat Eulerovo číslo jakožto funkční hodnotu exponenciální funkce v bodě 1.

Definice 3.12 (Eulerovo číslo)**: Eulerovo číslo** definujeme pomocí exponenciální funkce předpisem

$$e := e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{3.6}$$

[6]Pozor, zde jsme se dopustili kroku, který by bylo vhodné podrobněji okomentovat. Konkrétně jsme vynásobili dvě absolutně konvergentní číselné řady. Správnost tohoto kroku nedokazujeme.

Poznámka: V této poznámce provedeme první hrubý odhad hodnoty Eulerova čísla. Označme (s_n) posloupnost částečných součtů řady (3.6), tedy

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je očividně rostoucí a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Součet řady (3.6), tedy Eulerovo číslo, leží mezi čísly 1 a 3.

3.4 Přirozený logaritmus

Připomeňme si výsledek předchozí sekce. Exponenciální funkce $x \mapsto e^x$ je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Z (důkazu) věty 3.11 dále plyne, že e^x je kladné pro každé reálné x. Platí ale víc, oborem hodnot exponenciální funkce je[7] množina $(0, +\infty)$.

Definice 3.13: Existuje tedy inverzní funkce k exponenciále, která je také ostře rostoucí a zobrazuje $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$. Tuto funkci nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme symbolem $\ln$.

Věta 3.14 (Vlastnosti přirozeného logaritmu)**:** Přirozený logaritmus $\ln$ oplývá následujícími vlastnostmi:

i) pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,

ii) $\ln e = 1$ a $\ln 1 = 0$,

iii) pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Důkaz. *i)* Plyne přímo z definice inverzní funkce.

ii) Plyne přímo z definice inverzní funkce a vztahů $e^1 = e$ a $e^0 = 1$.

iii) Uvažme $x, y \in (0, +\infty)$ a označme $x' := \ln x$ a $y' := \ln y$, čili $e^{x'} = x$ a $e^{y'} = y$. Dle bodu *ii)* věty 3.11 platí $xy = e^{x'+y'}$, neboli $\ln(xy) = x' + y' = \ln x + \ln y$. □

3.5 Obecná mocnina

Pomocí exponenciální a logaritmické funkce zavedené v předchozí sekci definujeme obecnou mocninu. Jinak řečeno, cílem této sekce je dát korektní význam symbolu a^x, kde $a > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}. \tag{3.7}$$

Pro záporné celé n pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

[7] Pozor! Tento fakt jsme zatím neodvodili. O jeho pravdivosti se přesvědčíme až za pomoci spojitosti, konkrétně ve větě 4.22.

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít (3.7). Konečně položíme[8] $a^0 := 1$.

Symbol a^n má tedy dobrý smysl pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{R}$. Čtenář jistě snadno nahlédne, že při uvedené definici platí rovnosti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

pro libovolná kladná $n, m \in \mathbb{N}$.

Nyní se zbavíme požadavku na celočíselnost exponentu. Klíčem k úspěchu je následující definice.

Definice 3.15 (Obecná mocnina)**:** Pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Poznamenejme, že tato definice není v kolizi s dříve zavedenou exponenciální funkcí. Pro $a = e$ totiž máme

$$e^x = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x.$$

Na levé straně symbol e^x chápeme jako obecnou mocninu a na pravé straně jako exponenciální funkci.

Pojďme si nyní rozmyslet, jaké vlastnosti má námi zavedená obecná mocnina a zda-li rozšiřuje celočíselnou mocninu zmíněnou na začátku této sekce.

Věta 3.16 (Vlastnosti obecné mocniny)**:** Pro $a, b > 0$ platí

i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Uvažme tedy $a, b > 0$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Potom dle definice 3.15 platí

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y.$$

Podobně

$$(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{y \ln e^{x \ln a}} = e^{yx \ln a} = a^{yx} = a^{xy}.$$

Na konec s využitím věty 3.14

$$(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x.$$ □

Obdobně jako u exponenciální funkce se můžeme na obecnou mocninu dívat jako na funkci $x \mapsto a^x$. V tomto případě její vlastnosti závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta 3.17: Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

[8] I pro $a = 0$!

Důkaz. Pokud je $a = 1$, pak $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$. Uvažme $a > 1$. Z definice logaritmu víme, že $\ln a > 0$. Je-li $x < y$ pak $x \ln a < y \ln a$ a růst exponenciální funkce implikuje

$$a^x = e^{x \ln a} < e^{y \ln a} = a^y.$$

Zbývající případ $0 < a < 1$ lze vyšetřit analogicky.

Pokud $a = 1$ pak je oborem hodnot množina $\{1\}$. V ostatních případech má a^x stejný obor hodnot jako exponenciála, tedy $(0, +\infty)$. $\square$

Definice 3.18: Funkce a^x je tedy pro $a \neq 1$ ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$.

Poznámka: Pro každé $a, x > 0$ dostáváme

$$e^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = e^{\left(\log_a x \cdot \ln a \right) \frac{1}{\ln a}} = \left(a^{\log_a x} \right)^{\frac{1}{\ln a}} = x^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Z prostoty exponenciální funkce tudíž dostáváme $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Z tohoto vztahu již plynou všechny ostatní notoricky známé vlastnosti logaritmu.

Podobný způsobem (viz cvičení) lze dokázat známou rovnost

$$\log_a b^x = x \log_a b$$

platnou pro libovolné $0 < a \neq 1$, $b > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

Kapitola č. 4

Limita a spojitost funkce

Limita funkce; jednostranná limita funkce; Heineho věta; výpočet limity; limita složené funkce; příklady; spojitost funkce v bodě; věty o spojitosti funkce; spojitost funkce na intervalu; metoda půlení intervalu.

4.1 Limita funkce

U posloupnosti (a_n) jsme zkoumali, jak se chovají její členy pro velká n. Pokud se její členy „blížily“ k jistému $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jsme tuto hodnotu nazývali limitou této posloupnosti. Význam slova „blížit“ přesně popisovala definice 2.6, která říkala, že v *každém* okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečný počet výjimek.

Nyní u funkcí se můžeme ptát, jak se zadaná funkce f chová, když se nezávislá proměnná x blíží k zadanému bodu $a \in D_f$, případně $\pm\infty$ (tj. roste nad/pod všechny meze). V následující definici limity funkce si všimněte podobnosti s definicí limity posloupnosti (definice 2.6).

Definice 4.1: Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \smallsetminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

V symbolech

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in D_f)(x \in H_a \smallsetminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_c).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_a f = c.$$

Poznámka: Je možné, že z dřívějšího studia znáte pojmy „vlastní“ a „nevlastní“ limita. Definice obou těchto pojmů je obsažena v naší definici 4.1. V BI-ZMA tyto pojmy nepoužíváme.

Poznámka (ε-δ definice limity)**:** V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

ekvivalentní požadavku, aby f byla definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

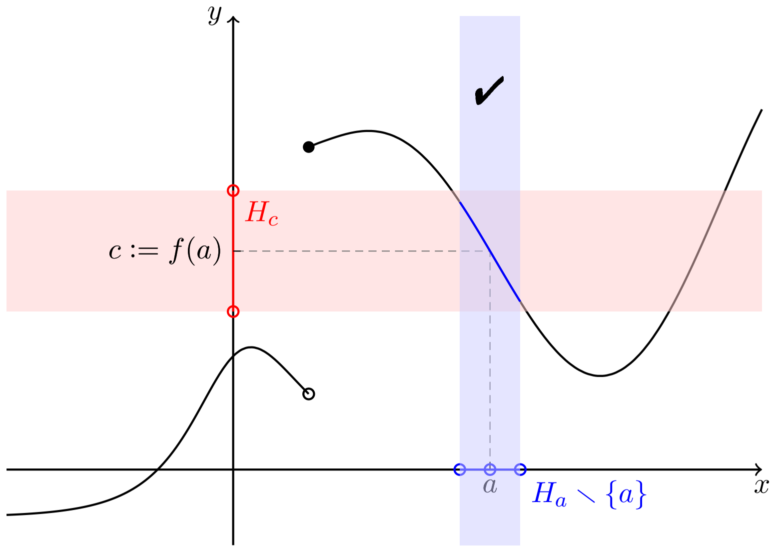
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Analogické formule lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a. Limita funkce f v bodě a může být různá od funkční hodnoty $f(a)$. Příkladem budiž funkce $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$ definovaná na celém $\mathbb{R}$. Ačkoliv pro funkční hodnotu platí $f(0) = 0$, pro limitu máme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Funkce f v bodě a ani nemusí být definovaná, přesto limita může existovat. Příkladem je funkce $f(x) := \operatorname{sgn}\frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

K snazšímu představení si požadavků v definici 4.1 uvádíme obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Limita funkce, ilustrace pro $a, c \in \mathbb{R}$.

V definici 4.1 jsme se dívali na chování funkce f na celém okolí bodu a (vyjma bodu a samotného). Podobně můžeme zkoumat chování funkce pouze vpravo, či vlevo, od zadaného bodu a. Získáváme tak pojem limity funkce zprava, či zleva.

Definice 4.2: Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém, okolí bodu a. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce f v bodě a zleva**, resp. **zprava**, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje levé okolí H_a^-, resp. pravé okolí H_a^+, bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \smallsetminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \smallsetminus \{a\},$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x\to a-} f(x) = c, \quad \lim_{a-} f = c,$$

resp.

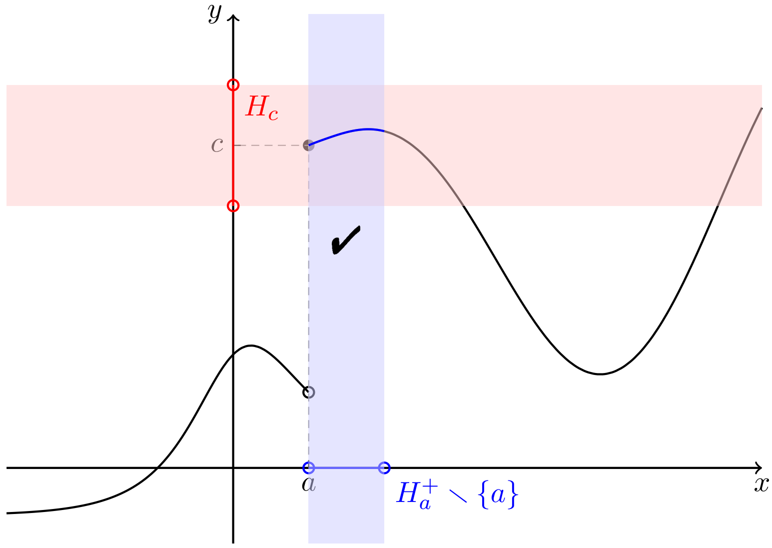
$$\lim_{x\to a+} f(x) = c, \quad \lim_{a+} f = c.$$

Pro lepší představu odkazujeme čtenáře na obrázek 4.2. Na závěr této podkapitoly uveďme několik příkladů výpočtů limit jednoduchých funkcí.

Příklad: Limita konstantní funkce je rovna dané konstantě. Je-li $c \in \mathbb{R}$ zadaná konstanta a $f(x) = c$ pro každé $x \in D_f = \mathbb{R}$, pak pro libovolný bod $a \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Skutečně, buď $H_c(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu c s poloměrem $\varepsilon > 0$. V případě naší konstantní funkce můžeme zvolit libovolné okolí $H_a(\delta)$ bodu a s poloměrem $\delta > 0$. Pak totiž pro $x \in H_a(\delta) \smallsetminus \{a\}$ jistě platí $f(x) = c \in H_c(\varepsilon)$. △

Příklad: Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x\to a} x = a.$$



Obrázek 4.2: Jednostranná limita funkce, ilustrace pro $a, c \in \mathbb{R}$.

Skutečně, vezmeme-li libovolné okolí H_a bodu a pak pro $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in H_a$. △

Příklad: Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Skutečně, buď $H_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$ a $c > 0$. Hledáme okolí $H_0(\delta)$ bodu 0 o poloměru $\delta > 0$ takové, že pokud $x \in H_0(\delta) \smallsetminus \{0\}$ pak $\frac{1}{x^2} \in H_{+\infty}(c)$. Požadujeme tedy aby

$$\frac{1}{x^2} > c \;\Rightarrow\; x^2 < \frac{1}{c} \;\Rightarrow\; |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Stačí proto zvolit třeba $\delta := \frac{1}{\sqrt{c}}$. △

Příklad: Platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ukažme nejprve první z limit. Buď $H_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$ dané konstantou $c > 0$. Zvolíme-li $\delta = \frac{1}{c} > 0$, pak pro $x \in (0, \delta) = H_0^+(\delta) \smallsetminus \{0\}$ platí

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = c.$$

Podobně v druhém příkladě pro libovolné okolí $H_{-\infty}(c)$ bodu $-\infty$ zadané konstantou $c < 0$ stačí položit $\delta = \frac{1}{|c|} > 0$. Pak pro libovolné $x \in H_0^-(\delta) \smallsetminus \{0\} = (-\delta, 0)$ platí

$$-\delta < x < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|c| = c.$$

Vzpomeňte, že $c < 0$. Na tomto místě je dobré si připomenout graf hyperboly $y = \frac{1}{x}$. △

4.2 Vlastnosti limit

Při výpočtu limit posloupností často nevyužíváme přímo definici, ale znalost několika základních limit, viz předchozí kapitolu. Znalosti těchto základních limit lze využívat při výpočtu limit složitějších funkcí. Podobně tomu bylo i u posloupností. Ukažme si tedy, jak s limitami funkcí pracovat.

Nejprve si rozmysleme, jaký je vztah mezi jednostrannými a oboustrannými limitami.

Věta 4.3: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důkaz. K důkazu si stačí rozmyslet obě implikace.

- Nechť existuje oboustranná limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. Je-li H_c libovolné okolí bodu c, pak existuje H_a okolí bodu $a$takové, že je-li $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$, pak $f(c) \in H_c$. Tudíž pro $x \in H_a^{\pm} \smallsetminus \{a\}$ je $f(x) \in H_c$. Jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_\pm} f(x)$ proto obě existují a obě jsou rovny c.
- Naopak. Nechť obě jednostranné limity existují o obě jsou rovny c. Buď H_c libovolné okolí bodu c. Pak existuje levé okolí $H_a^-(\varepsilon_1)$ bodu a a pravé okolí $H_a^+(\varepsilon_2)$ bodu a tak, že pokud $x \in H_a^-(\varepsilon_1) \smallsetminus \{a\}$ nebo $x \in H_a^+(\varepsilon_2) \smallsetminus \{a\}$, pak $f(x) \in H_c$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak pro $x \in H_a(\varepsilon) \smallsetminus \{a\}$ platí $f(x) \in H_c$. Oboustranná limita funkce f v bodě a tedy existuje je rovna c. □

Předešlou větu často využíváme na vyvracení existence oboustranné limity. Přesněji formulujeme následující tvrzení.

Důsledek 4.4: Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$. Platí-li aspoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,
- alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Příklad: Limita

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje. Skutečně, pro jednostranné limity platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x &= 1, \\ \lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x &= -1. \end{aligned}$$

Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$). Na tomto místě je vhodné si připomenout graf funkce signum! △

Příklad: Limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

neexistuje. Opravdu, na konci předešlé podkapitoly jsme odvodili, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty. \qquad \triangle$$

Další věta nám ukazuje, jak souvisí pojmy „limita posloupnosti" a „limita funkce". Díky této větě můžeme některé limity posloupností počítat pomocí znalosti limity funkcí. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že na limity funkcí můžeme použít nástroje diferenciálního počtu (jako například l'Hospitalovo pravidlo), které pro posloupnosti nemáme k dispozici.

Věta 4.5 (Heine)**:** $\lim_{x\to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \smallsetminus \{a\}$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Důkaz této věty vynecháváme. Implikace v jednom směru je snadná (rozmyslete která), druhá je již komplikovanější. Po drobné modifikaci platí Heineho věta i pro jednostranné limity.

Věta 4.6 (Heine pro jednostranné limity)**:** $\lim_{x\to a-} f(x) = c$, resp. $\lim_{x\to a+} f(x) = c$, právě když je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Příklad: Z dřívější přednášky o posloupnostech víme (viz větu 2.16), že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolnou posloupnost (a_n) splňující $a_n \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \langle 0, +\infty)$ platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$. Heineho věta (věta 4.5) pak implikuje

$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$$

pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

Tento fakt lze alternativně dokázat i přímo z definice limity funkce $\sqrt{x}$ v bodě α. △

Heineho věta nám dále umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Důsledek 4.7: Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a (x_n), (z_n) jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, konvergující k a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad: Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje. Označme $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

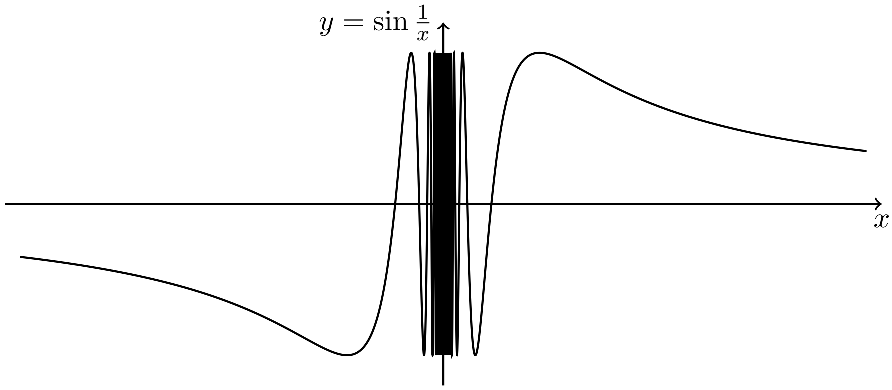
Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Pro představu uvádíme obrázek 4.3. Z obrázku je patrné, že limita posloupnosti obrazů závisí na způsobu jakým se k bodu 0 blížíme[1]. △



Obrázek 4.3: Graf funkce $\sin \frac{1}{x}$. Limita této funkce v bodě 0 neexistuje.

Velmi často se setkáváme se součtem, součinem, či podílem funkcí. Pro jejich limity platí analogická věta jako v případě posloupností. Porovnejte tuto větu s větou 2.13.

Věta 4.8: Nechť f a g jsou funkce a a prvek $\overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\begin{aligned}\lim_a (f+g) &= \lim_a f + \lim_a g,\\ \lim_a f \cdot g &= \lim_a f \cdot \lim_a g,\\ \lim_a \frac{f}{g} &= \frac{\lim_a f}{\lim_a g},\end{aligned}$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného.

Důkaz. Důkaz této věty je potřeba provést ve všech možných případech[2]. Ukážeme jeden z případů.

- $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$, $\lim_a g = d \in \mathbb{R}$, součet: Buď $\varepsilon > 0$ zadáno. Potom existuje okolí H_a bodu a takové, že
$$x \in H_a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Je-li tedy $x \in H_a$, pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti platí
$$|f(x) + g(x) - c - d| = \big|(f(x) - c) + (g(x) - d)\big| \leq |f(x) - c| + |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Tudíž $\lim_a (f+g) = c + d$. □

Poznamenejme, že analogická věta platí i pro jednostranné limity. Počítat limitu polynomů je díky předcházející větě velmi jednoduché.

Příklad: Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí (věta 4.8), ihned dostaneme tvrzení uvedené na začátku našeho příkladu. Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1. \qquad \triangle$$

[1] „Způsob blížení se k 0“ v tomto případě přesně definují posloupnosti (x_n) a (z_n).
[2] Alternativně bychom se mohli odvolat na Heinehu větu a znalost analogické věty pro posloupnosti.

O něco složitější je počítat limitu racionálních lomených funkcí. Zde už může nastat více možných situací. Veškeré nástroje už ale máme připravené a následující příklad jen demonstruje jejich aplikaci.

Příklad: Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$

tudíž $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech b a c je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

$$\lim_{x \to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x \to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x \to c-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1, 2\}$$

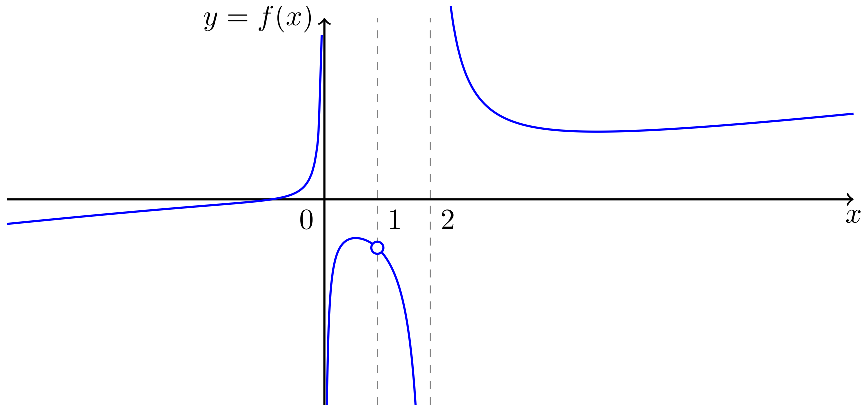
Je dobré porovnat naše výsledky s grafem uvažované funkce, vizte obrázek 4.4. △

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

V bodě $x = 2$ je jmenovatel roven 3, což je nenulové číslo. Podle věty o limitě podílu proto ihned dostáváme

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{4}{3}.$$ △



Obrázek 4.4: Graf racionální lomené funkce.

Příklad: Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}.$$
Nyní je limita typu $\frac{0}{0}$. Z polynomů v čitateli a jmenovateli proto můžeme vytknout kořenový činitel $x-1$,
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$
Protože ale pro jednostranné limity platí
$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}\cdot(\pm\infty) = \pm\infty,$$
původní limita podle důsledku 4.4 neexistuje. △

Mnoho funkcí, na které narazíme, jsou složené funkce. Následující důležitá věta nám umožňuje počítat jejich limity, aniž bychom se museli obracet na definici limity.

Věta 4.9 (O limitě složené funkce)**:** Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$,
2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom platí $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Poznámka: Podmínka v bodě tři je důležitá. Například pokud uvážíme $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$ a $g(x) = 0$, pak
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$
Podmínky v bodě jedna a dva jsou tedy splněny, ale ani jedna podmínka v bodě tři neplatí. Dále, složená funkce $f\circ g$ neexistuje, její definiční obor je prázdná množina. Nemá proto ani smysl počítat její limitu.

Hrubě řečeno lze říci, že pokud se vnitřní funkce na okolí bodu a nechová „pěkně“, nesplňuje bod tři předchozí věty, pak limita složené funkce nemusí existovat.

Příklad: Vypočtěme limitu

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme

$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Na cvičení ověříte, že (1. a 2. předpoklad věty o limitě složené funkce)

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Dále například pro $H_1(1) = (0,2)$ platí $g(x) \neq -\infty$ pro všechna $x \in H_1(1) \setminus \{1\}$. První možnost v 3. předpokladu je tedy splněna. Větu o limitě složené funkce lze aplikovat a dostáváme výsledek

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0.$$

△

4.3 Nerovnosti v limitách

K výpočtům limit posloupností jsme často s výhodou používali větu o limitě sevřené posloupnosti (věta 2.25). Analogická tvrzení platí i pro limitu funkce. Těmito tvrzeními se budeme zabývat v této podkapitolce.

Věta 4.10: Nechť existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pak platí dvě tvrzení:

1. Pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

   $$\text{pro všechna } x \in H_a \smallsetminus \{a\} \text{ platí } f(x) < g(x).$$

2. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že

   $$\text{pro všechna } x \in H_a \smallsetminus \{a\} \text{ je } f(x) \leq g(x),$$

   potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Důkaz. Dokažme postupně obě tvrzení.

1. Označme $\alpha = \lim_a f$ a $\beta = \lim_a g$. Podle předpokladu $\alpha < \beta$ lze zvolit disjunktní okolí H_α bodu α a H_β bodu β. Podle předpokladu existence limit existuje jisté okolí H_a bodu a pro které platí

   $$x \in H_a \smallsetminus \{a\} \ \Rightarrow f(x) \in H_\alpha \text{ a } g(x) \in H_\beta.$$

   Pro stejná x proto platí $f(x) < g(x)$.

2. Plyne ihned z předchozího bodu. □

Hlavním výsledkem této podkapitoly je následující věta.

Věta 4.11 (O limitě sevřené funkce)**:** Nechť pro funkce f, g, h a body $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. existuje okolí H_a bodu a takové, že pro každé $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = c$.

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a je rovna c.

Důkaz. Uvažme nejprve případ $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \setminus \{a\}$ pak $f(x) \in H_c(\varepsilon)$ a $h(x) \in H_c(\varepsilon)$. Pro $x \in U_a \cap H_a$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Proto i $g(x) \in H_c(\varepsilon)$. □

Poznamenejme, že pokud např. $c = +\infty$, pak stačí pouze dolní odhad. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ máme k dispozici U_a okolí bodu a takové, že pro $x \in U_a$ je $f(x) > K$. Je-li $x \in U_a \cap H_a$ pak $h(x) \geq f(x) > K$. Podobná poznámka platí i pro $c = -\infty$.

Příklad: Vypočtěte $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$. Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ totiž neexistuje. Ovšem nerovnost

$$f(x) := 0 \leq g(x) := \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zvolíme-li např. $H_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak

1. nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,
2. existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$. △

Poznámka: V předchozím výpočtu jsme využili následující ekvivalence

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0,$$

jejíž platnost se ověří úplně stejně jako u limity posloupnosti.

Poznámka: Dále platí následující tvrzení: je-li $f(x)$ definována a nezáporná na okolí bodu a, a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, pak $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{c}$. Toto tvrzení se dokáže velmi podobně jako v případě posloupností. Můžeme se na něj také dívat jako na speciální případ věty o limitě složené funkce kde jsme využili toho, že odmocnina je spojitá. Ke spojitosti se dostaneme v příští kapitole.

Příklad: Ověřte správnost následujících tvrzení

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V tento okamžik máme k dispozici pouze geometrickou definici goniometrických funkcí, vizte obrázek 4.5. Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Skutečně, porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC na obrázku 4.5. Funkce sin je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!) Funkce sin i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

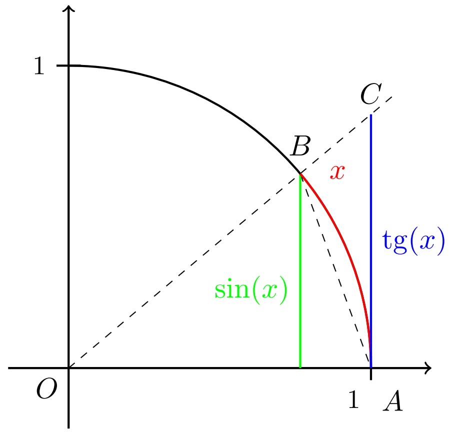
plyne nerovnost

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme poslední hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je totiž kladná na jistém okolí nuly. △



Obrázek 4.5: Jednotková kružnice a výpočet funkcí sinus a tangens.

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}.$$

Výraz nejprve upravíme,

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě složené funkce a známé limity, pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 1.$$ △

4.4 Definice a kriteria spojitosti

Jak již bylo řečeno, hodnota limity funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ nezávisí na funkční hodnotě funkce f v tomto bodě (funkce v daném bodě ani nemusí být definována a přesto v něm může mít limitu). Zavádíme proto pojem spojité funkce, který spojuje pojem limity a funkční hodnoty. Funkce je spojitá v bodě $a \in D_f$ právě tehdy, když její funkční hodnota v bodě a je rovna její limitě v bodě a. Přesněji:

Definice 4.12: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$,

- funkce f je definována na levém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Funkce f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce je velmi důležitá pro praktické aplikace. Na tomto místě zatím jenom poznamenejme, že je-li funkce f spojitá v bodě a, pak z rovnosti $f(a) = b$ plyne, že $f(x)$ je blízko b pokud x je blízko a. Přesně to totiž korektně říká definice 4.12.

Jako první pozorování uveďme, že pokud $a \notin D_f$, pak takováto funkce nemůže být z definice spojitá i kdyby $\lim_{x \to a} f(x)$ existovala. V definici spojitosti se totiž **předpokládá**, že funkce je definována v bodě a. V takovémto bodě bychom mohli danou funkci tzv. **spojitě dodefinovat** touto limitní hodnotou. Vytvořili bychom tedy novou funkci, která by v bodě a byla spojitá.

Protože $a \in D_f \subset \mathbb{R}$ a $f(a) \in \mathbb{R}$, dostáváme přeformulováním definice limity následující $\varepsilon - \delta$ formulaci spojitosti:

Poznámka ($\varepsilon - \delta$ formulace spojitosti)**:** Funkce f definovaná na okolí bodu a je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Následující tvrzení jsou bezprostředním důsledkem vlastností limity funkce:

Věta 4.13: Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Důkaz. Viz větu 4.3. □

Věta 4.14: Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Důkaz. Viz větu 4.8. □

Věta 4.15: Buďte g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Důkaz. Viz větu 4.9. Povšimněte si, že třetí předpoklad věty 4.9 je pro spojité funkce automaticky splněn. □

Jako první příklad spojité funkce zmiňme příklad libovolného polynomu.

Příklad: V předchozí podkapitole jsme ukázali, že pro libovolné reálná a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. △

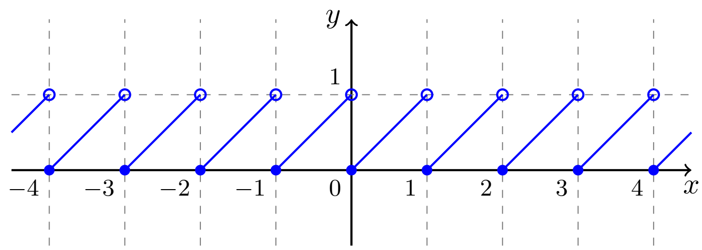
Všimněte si, že díky znalosti vlastností pojmu limity (konkrétně věty o limitě součtu a součinu) a pouze znalosti spojitosti funkce $f(x) = x$ a konstantní funkce jsme odvodili spojitost libovolného polynomu. Vůbec jsme nepotřebovali explicitně použít definici spojitosti/limity.

Dále se podívejme na komplikovanější příklad, který pěkně ilustruje všechny možné druhy spojitosti (zleva/zprava).

Příklad: Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$

Graf této funkce je uveden na obrázku 4.6. △



Obrázek 4.6: Graf funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice 4.16: Funkce f je spojitá na intervalu J, právě když je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka: Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost funkce na uzavřeném intervalu má závažné důsledky pro řešení rovnic. Následující věta dává postačující podmínku pro existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ a dokonce i nabízí algoritmus jak toto řešení nalézt. Mimo to ji ještě dále s výhodou využijeme.

Povšimněte si, že není žádným omezením mít na pravé straně rovnice číslo 0. Pokud bychom měli řešit rovnici $h(x) = g(x)$ pro neznámou x, vždy můžeme tento problém přeformulovat do tvaru $f(x) := g(x) - h(x) = 0$.

Věta 4.17 (Metoda půlení intervalu)**:** Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1. Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti (a_n), (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

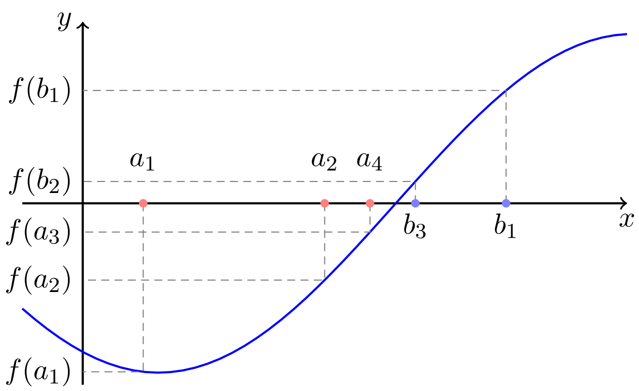
$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$. Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ můžou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$. Tím je důkaz věty dokončen. $\square$

Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí. Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. Jeho výhodou je, že máme pod kontrolou chybu výpočtu, hledané řešení c vždy leží v intervalu (a_n, b_n). Pokud délka tohoto intervalu je již kratší než požadovaná přesnost, můžeme algoritmus zastavit a třeba o průměru $\frac{a_n+b_n}{2}$ prohlásit, že se jedná o hledané řešení (v dané přesnosti). Nevýhodou metody půlení intervalu je její ne příliš vysoká rychlost (typicky je potřeba udělat více iterací než se dostaneme k požadované přesnosti).

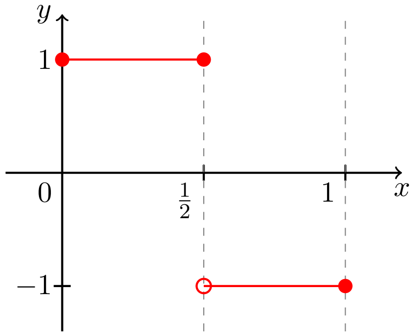


Obrázek 4.7: Demonstrace k metodě půlení intervalu, větě 4.17.

Poznámka: Předpoklad spojitosti v předešlé větě 4.17 je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$. Sice $f(0)\cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0,1)$ splňující $f(x) = 0$.



Obrázek 4.8: Předpoklad spojitosti pro tvrzení věty 4.17 je podstatný.

Očividným důsledkem předchozí věty 4.17 je následující tvrzení.

Důsledek 4.18: Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

Další vlastností spojitých funkcí je, že zobrazují intervaly na intervaly. To pro nespojité funkce nemusí být pravda (rozmyslete!).

Věta 4.19: Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz. $f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna k mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a BÚNO $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - k$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $g(a) = \alpha - k$ a $g(b) = \beta - k$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = k$. □

Spojitým obrazem intervalu je tedy interval. Zachovává spojitost i uzavřenost, resp. otevřenost, intervalu? Není těžké si rozmyslet, že obrazem otevřeného intervalu nemusí být opět otevřený interval[3]. Spojitým obrazem uzavřeného intervalu už ale vždy bude uzavřený interval. Platí totiž následující věta.

Věta 4.20: Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď jednoprvková množina, nebo uzavřený interval.

Důkaz. Podle věty 4.19 již víme, že $f(J)$ je buď jednoprvková množina (pokud je funkce konstantní) a nebo interval (pokud je funkce nekonstantní). Ukažme nyní uzavřenost $f(J)$ pro nekonstantní f.

Označme $J = \langle a, b\rangle$. Postupujme sporem, bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme, že obraz je tvaru $(c, d\rangle$ kde $c \in \mathbb{R}$ nebo $c = -\infty$. Existuje posloupnost (y_n) konvergující k c jejíž členy leží v $f(J)$. Skutečně, v případě $c \in \mathbb{R}$ můžeme volit $y_n = c + \frac{1}{n}$ od dostatečně velkého n a v případě $c = -\infty$ lze volit $y_n = -n$ opět pro dostatečně velké n. Protože $y_n \in f(J)$, existují $x_n \in J$ splňující $y_n = f(x_n)$. Posloupnost (x_n) patří do $\langle a, b\rangle$ a je proto omezená. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty 2.20 lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost (x_{k_n}). Existuje tedy $x \in J = \langle a, b\rangle$ splňující $\lim_n x_{k_n} = x$. Ze spojitosti

[3] Uvažte například funkci $f(x) = \sin x$ a otevřený interval $J = (0, 2\pi)$. Obrazem tohoto otevřeného intervalu je uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$.

dostáváme $c = \lim_n f(x_{k_n}) = f\big(\lim_n x_{k_n}\big) = f(x)$. Proto $c \in f(J)$, což je spor s naším předpokladem. $\square$

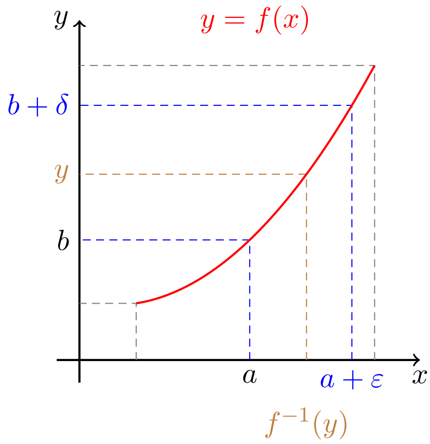
Věta 4.21 (O inverzní funkci)**:** Buď f ryze monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz. f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí věta 4.19. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a+\varepsilon) - b$ a $y \in (b, b+\delta)$ platí

$$\begin{aligned} b &< y < b + \delta = f(a+\varepsilon) \\ a = f^{-1}(b) &< f^{-1}(y) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pro lepší orientaci je dobré nakreslit si obrázek, vizte obrázek 4.9. Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(a)$. Podobně pro spojitost zleva. $\square$



Obrázek 4.9: K důkazu věty o vlastnostech inverzní funkce.

4.5 Spojitost elementárních funkcí

V této kapitole rozeberem spojitost některých elementárních funkcí. Připomeňme, že v dřívějším textu jsme již odvodili spojitost libovolného polynomu. Podívejme se nyní na spojitost některých trigonometrických funkcí.

Příklad: Funkce sin a cos jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Připomeňme známé, v minulé podkapitole vypočtené, limity

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci sin platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (věta 4.9) a součinu/součtu limit (věta 4.8) platí

$$\lim_{x\to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce sin. Spojitost funkce cos se ukáže analogicky. $\triangle$

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí (věta 4.8) ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Věta 4.22 (Spojitost exponenciály)**:** Exponenciální funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0, tedy že platí

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$$

Pro každé přirozené n a $x \in (-1,1)$ platí nerovnost

$$0 \le \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} =$$
$$= |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \le |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} = \frac{|x|}{1-|x|/2} \le 2|x|.$$

V odhadu jsme využili nerovnost $k! \ge 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1-|x|/2} \le \frac{1}{1-1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1,1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností (věta 2.23) dostáváme nyní nerovnost

$$0 \le |e^x - 1| \le 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1,1)$. Věta o limitě sevřené funkce (věta 4.11) nyní implikuje

$$\lim_{x\to 0} |e^x - 1| = 0$$

a tedy i

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Z předchozích úvah, z bodu ii) věty 3.11 a z věty o limitě složené funkce (věta 4.9) nyní plyne spojitost exponenciální funkce v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$. Skutečně, platí

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{x\to a} e^{a+x-a} = e^a \lim_{x\to a} e^{x-a} = e^a \cdot 1 = e^a. \qquad \square$$

Věta 4.23: Pro exponenciální funkci platí

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Oborem hodnot exponenciální funkce je neomezený interval $(0,+\infty)$.

Důkaz. Pro $x > 0$ platí $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + x$. Podobný argument jsme již použili v důkazu bodu iv) věty 3.11. Je-li $K > 0$ dáno pevně, pak pro $x \in (K-1,+\infty)$ platí $e^x > 1 + x > 1 + K - 1 = K$. Tedy $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Naopak,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dle věty 4.22 víme, že exponenciála je spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$. Věta 4.19 pak implikuje, že obor hodnot exponenciály je také interval. Vzhledem k výše odvozeným limitám a bodu *iii)* věty 3.11 tento interval nutně musí být interval $(0,+\infty)$. $\square$

Důsledek 4.24: Logaritmus je spojitá funkce na intervalu $(0, +\infty)$, tj. pro každé $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a.$$

Navíc

$$\lim_{x \to 0_+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Důkaz. Spojitost logaritmu plyne okamžitě z věty 4.21. Dodatek je pak důsledkem věty 4.23. □

Příklad: Protože už víme, že funkce sin, cos, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}, \\
\arccos &= \left(\cos \Big|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}, \\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}, \\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg} \Big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

△

Poznámka: Na závěr této podkapitoly poznamenejme, že ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x \to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$

pro $a \geq 0$ a $k = 2, 3, \ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Obdobně, protože

$$\lim_{x \to a} |x| = |a|$$

pro $a \in \mathbb{R}$, platí, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

4.6 Další důležité limity a důsledky Heineho věty

Lemma 4.25: Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Důkaz. Uvažme $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} = x \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}.
\end{aligned}$$

Z těchto rovností plyne odhad

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| &\leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}} = \\
&= \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} \leq \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} = \\
&= \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = |x|.
\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne (věta 2.23) nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta 4.11 implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0$$

čili

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \qquad \square$$

Lemma 4.26: Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz. Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)} - 1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu (důsledek 4.24) víme, že $\lim_{x \to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce (věta 4.9) a lemma 4.25 dávají kýžený výsledek. $\square$

Lemma 4.27: Platí

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz. Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny),

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Díky spojitosti exponenciály (věta 4.22) stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího lemmatu a věty o limitě složené funkce (věta 4.9) pak ihned dostáváme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Tudíž

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e. \qquad \square$$

Důsledek 4.28: Pro libovolnou posloupnost (a_n) splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Důkaz. V důsledku lemmatu 4.27 a Heineho věty 4.5 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|}=e \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|}=e.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $m_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takových, že pro každé $n > m_0$ platí

$$\left|\left(1+\frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|}-e\right|<\varepsilon$$

a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left|\left(1+\frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|}-e\right|<\varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$. Tudíž pro každé $n > n_0$ dostáváme

$$\left|\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}-e\right|<\varepsilon,$$

čímž je platnost limity dokázána z definice. □

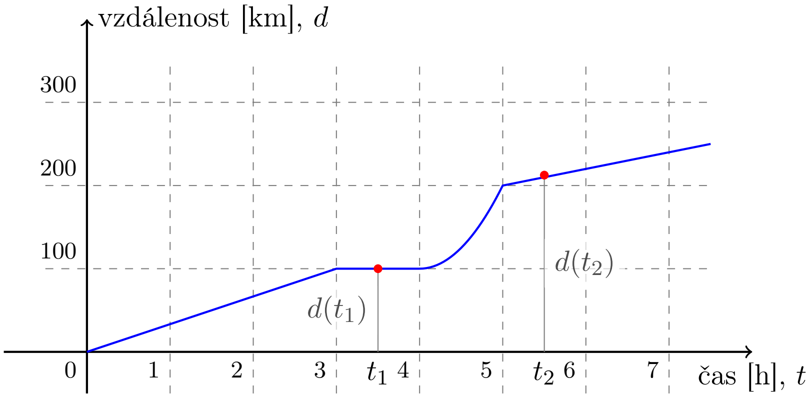
Kapitola č. 5

Derivace

Derivace funkce; geometrický význam derivace; tečna ke grafu funkce; derivace elementárních funkcí; vlastnosti derivace; lokální maximum a minimum funkce; nutná podmínka pro existenci extrému; Rolleova věta; Lagrangeova věta, věta o přírůstku funkce; monotonie funkce; konvexnost a konkávnost; asymptoty funkce; vyšetřování průběhu funkce; l'Hospitalovo pravidlo; kubická interpolace (splines); separace kořenů; Newtonova metoda; výpočet třetí odmocniny pomocí Newtonovy metody.

5.1 Rychlost a hledání tečny

Začněme nejprve s jednoduchým motivačním příkladem s fyzikálním nádechem. Jaký je vztah mezi polohou a rychlostí tělesa? Uvažme případ tělesa pohybujícího se podle obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Graf uražené vzdálenosti v závislosti na čase.

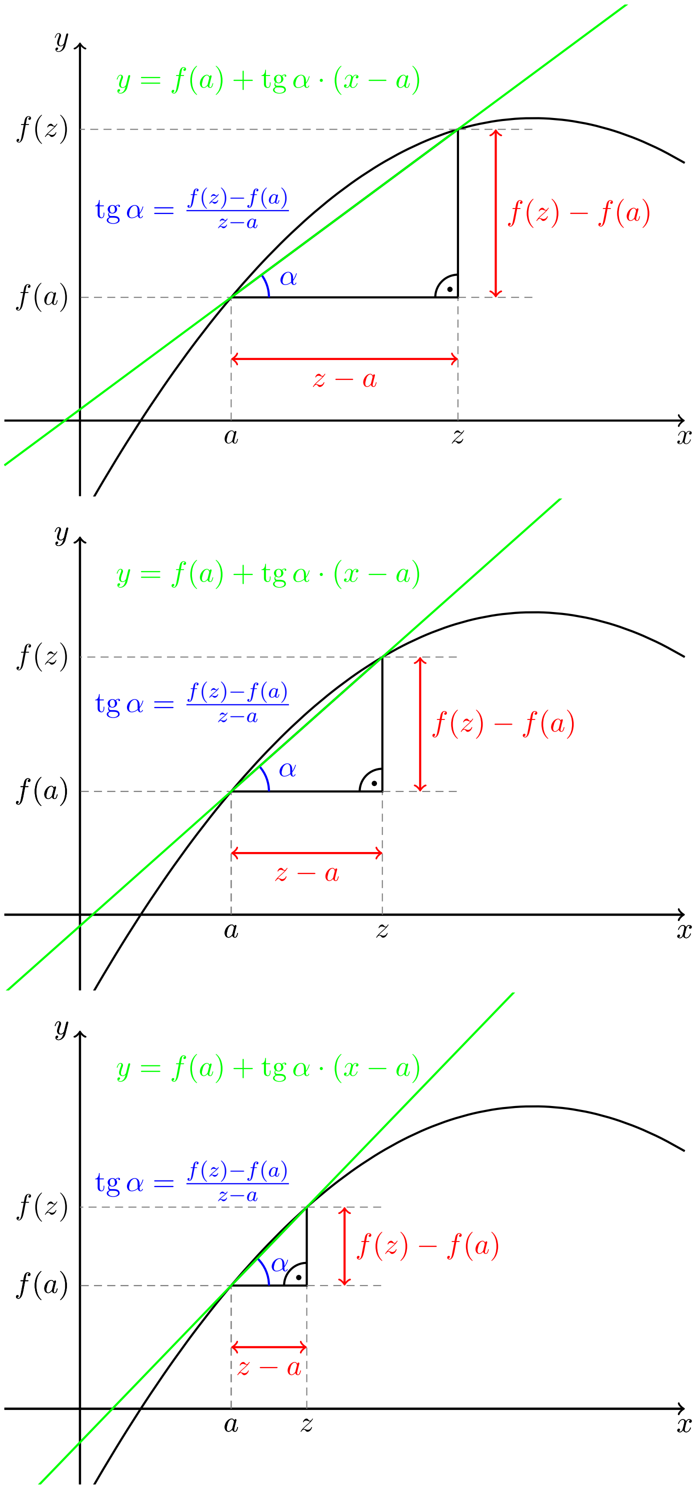
Graf na obrázku 5.1 zachycuje vzdálenost d uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Poloha d tělesa je tedy **funkcí** času t. Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nad tímto problémem se můžeme zamýšlet i geometricky. Díváme-li se na graf uražené vzdálenosti, pak „sklon“ tohoto grafu v daném bodě udává okamžitou rychlost. Podrobněji tento pohled rozebereme na obrázku 5.2, hlavní otázkou je, jak určit „sklon“ grafu v daném bodě. Zde vstoupí do hry pojem tečny ke grafu funkce. Na obrázku 5.2 uvádíme grafickou reprezentaci konstrukce tečny limitním procesem pomocí sečen. Vidíme, že výše uvedený podíl lze interpretovat jako tangens úhlu svíraného tečnou grafu funkce a osou x.



Obrázek 5.2: Konstrukce tečny.

5.2 Derivace funkce

V souladu s tím, co bylo uvedeno na začátku této kapitoly nyní definujeme:

Definice 5.1: Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5.1}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Derivaci funkce f se můžeme pokoušet počítat ve všech bodech D_f. Získáváme tak novou funkci.

Definice 5.2: Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $a \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(a)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Poznámka: Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Všimněte si, že limitu v definici derivace (5.1) lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tento tvar je často výhodný pro výpočty. Bod a se vyskytuje pouze v předpisu funkce jejíž limitu počítáme.

Díky derivaci nyní můžeme zkonstruovat tečnu udáním její rovnice. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy.

Definice 5.3: Nechť existuje $f'(a)$. Je-li

- funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$, nazýváme přímku s rovnicí $x = a$
- $f'(a) \in \mathbb{R}$, nazýváme přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

tečnou funkce f **v bodě** a.

V prvním případě svírá tečna grafu funkce f v bodě a úhel $\frac{\pi}{2}$ s osou x, v druhém případě svírá s osou x úhel α splňující $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

Na obrázku 5.3 je modře znázorněn graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$, $D_f = \mathbb{R}$. Pro její derivaci v bodě 2 platí

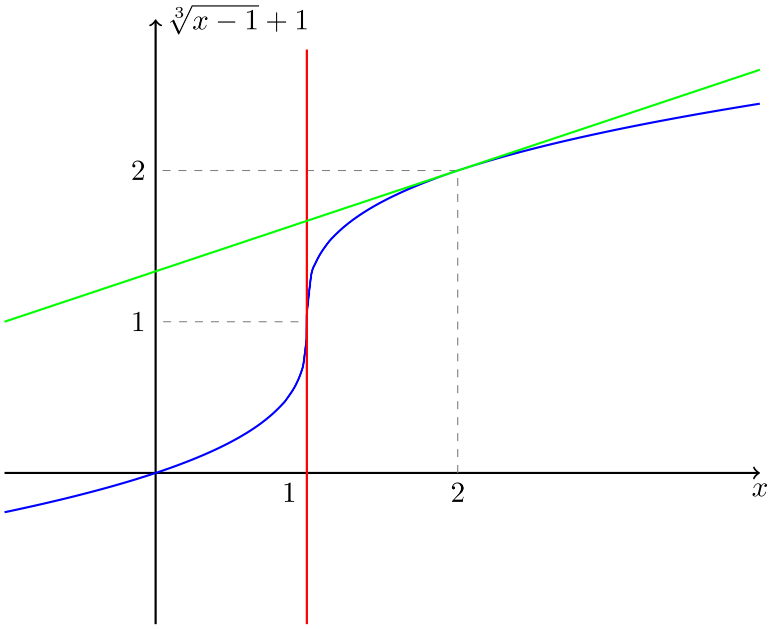
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h \cdot \left((1+h)^{2/3} + (1+h)^{1/3} + 1\right)} = \frac{1}{3}.$$

Tečnou grafu funkce f v bodě 2 je přímka

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 + \frac{1}{3}(x - 2),$$

na obrázku 5.3 vynesena zeleně. Pro derivaci v bodě 1 platí

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{-2/3} = +\infty.$$



Obrázek 5.3: Dva typy tečny grafu funkce.

Protože funkce f je v bodě 1 spojitá, je tečnou v bodě 1 (červená) přímka $x = 1$.

Nyní vypočtěme derivace některých funkcí přímo pomocí její definice. Uvažme nejprve funkci ze všech funkcí nejjednodušší.

Příklad: Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě. Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$. △

Tento výsledek by nás neměl nijak překvapovat. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. Tečna tohoto grafu v libovolném bodě je pak opět tato přímka, jež je rovnoběžná s osou x a svírá proto s osou x úhel 0, $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Přistupme nyní k odvození vztahů pro derivace dalších elementárních funkcí.

Příklad: Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $\left(e^x\right)' = e^x$. V minulé kapitole jsme odvodili vztah (lemma 4.25)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Pro derivaci funkce $f(x) = e^x$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ tedy skutečně platí platí $f'(a) = f(a)$. △

Příklad: Derivace funkce $\ln x$ je funkce $\frac{1}{x}$, kde $x > 0$. Tedy pro $x > 0$ máme rovnost $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$. V minulé kapitole jsme odvodili vztah (lemma 4.26)

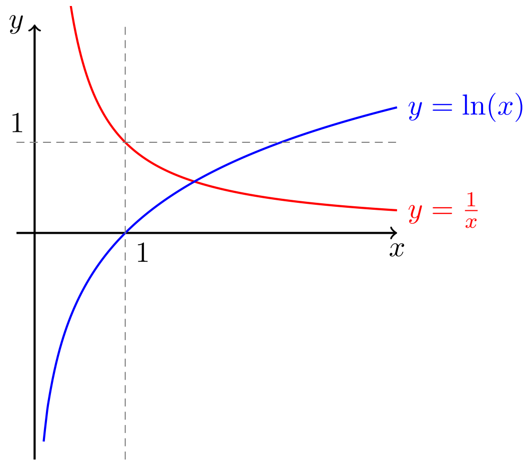
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní pro kladné a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}-1\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\frac{1}{a}\cdot 1=\frac{1}{a}.$$

Pro derivaci funkce $f(x)=\ln x$ v bodě $a>0$ platí $f'(a)=\frac{1}{a}$. △

Pro grafickou představu o funkci a její derivaci uvádíme obrázek 5.4. V závislosti na bodu na ose x si všimněte vztahu mezi sklonem modré křivky (logaritmus $\ln x$) a hodnotou červené křivky $(\frac{1}{x})$!



Obrázek 5.4: Grafy funkcí $f(x)=\ln(x)$ a $g(x)=\frac{1}{x}$ pro $x>0$.

Poznámka: Všimněte si, že funkce $\ln x$ je definovaná na množině $(0,+\infty)$ a v každém bodě x jejího definičního oboru je její derivace rovna $\frac{1}{x}$. Funkce $\frac{1}{x}$ je ale definována pro všechna nenulová x.

Označíme-li $f(x)=\ln|x|$, s definičním oborem $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak v každém bodě D_f platí $f'(x)=\frac{1}{x}$. Pro kladná x jsme to již ověřili. Pro záporná x není těžké nahlédnout, že stále platí

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\ln|x+h|-\ln|x|}{h}&=-\lim_{h\to 0}\frac{\ln(-x-h)-\ln(-x)}{-h}=\\&=-\lim_{t\to 0}\frac{\ln(-x+t)-\ln(-x)}{t}=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Příklad: Pro kladné přirozené $n\in\mathbb{N}$ je derivací funkce x^n funkce nx^{n-1}. Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned}\frac{x^n-a^n}{x-a}&=\frac{1}{x-a}\cdot(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})\\&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}}_{n\ \text{členů}}.\end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}=na^{n-1}.$$ △

Příklad: Speciálně pak například platí

$$(x^2)'=2x,\quad\text{nebo}\quad(x^{22})'=22x^{21}.$$ △

Příklad: Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$. Pomocí součtového vzorce pro sin dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\
&= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\
&= \cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0=\cos(a).
\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Navíc

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h+1} = \\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h+1} = -1\cdot\frac{0}{1+1}=0.
\end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme odvodit (proveďte!)

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a),$$

pro každé $a\in\mathbb{R}$. △

5.3 Vlastnosti derivace

Již jsme zavedli dvě lokální vlastnosti funkcí. Máme-li zadánu funkci f a bod a v jejím definičním oboru, můžeme zkoumat spojitost funkce f v bodě a a diferencovatelnost funkce f v bodě a. Jak spolu tyto pojmy souvisí?

Věta 5.4: Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí implikace

$$f'(a)\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Důkaz. Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0.
\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost" znamená $f'(a)\in\mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má za uvedených předpokladů smysl. □

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a. Jako příklad lze uvážit funkci $f(x)=|x|$ a bod $a=0$. Skutečně, protože

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0_+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_+}\operatorname{sgn}(h)=+1, \\
\lim_{h\to 0_-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_-}\operatorname{sgn}(h)=-1
\end{aligned}$$

oboustranná limita (tedy derivace $f'(0)$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

neexistuje. Funkce f je však v bodě 0 spojitá, jak snadno nahlédneme vypočtením její limity v bodě 0.

Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější. Potřebovali bychom použít vlastnosti pojmu stejnoměrné konvergence funkčních řad, který však v BI-ZMA studovat nebudeme.

Pokud má funkce v daném bodě nekonečnou derivaci, nemusí v něm být spojitá. Například o funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ víme, že není spojitá v bodě $a = 0$, protože obě jednostranné limity jsou navzájem různé. V bodě $a = 0$ ale má tato funkce derivaci a její hodnota je

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Přistupme nyní k problému výpočtu derivace. Opět se jedná o aplikaci vět o limitách funkcí.

Věta 5.5 (Derivace součtu, součinu a podílu)**:** Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**[1]. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),\\ (x\sin(x))' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Důkaz pro součet a součin. Ukažme si, jak dokázat pravidla pro derivaci součtu a součinu funkcí. Předpokládejme, že funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a),\\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} =\\ &= f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

Zde jsme vždy použili větu 4.8 o limitě součtu a součinu (výrazy jsou díky diferencovatelnosti definovány) a navíc jsme použili spojitost f a g, která, jak víme, plyne z diferencovatelnosti. $\square$

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz, německý matematik a filozof, 1646 – 1716

Důkaz vzorečku pro podíl se provede stejným způsobem. Ukažme si nyní použití věty 5.5 na několika příkladech.

Příklad: Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \end{aligned}$$

platné na příslušných definičních oborech. △

Nyní tedy umíme derivovat součty, součiny a podíly funkcí, jejichž derivace již známe. Je možné derivovat i složené funkce, s kterými často přicházíme do styku? Odpověď na tuto otázku je kladná.

Věta 5.6 (Derivace složené funkce)**:** Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Příklad: Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad (\sin(\cos(x)))' = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)).$$

Skutečně, v prvním příkladě je vnější funkcí $f(x) = e^x$ a vnitřní funkcí $g(x) = x^2$. Pak totiž

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2}.$$

A podle věty

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Podobně lze postupovat i v druhém příkladě. △

Příklad: Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$. Potom podle věty o složené funkci máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0. \qquad \triangle$$

Příklad: Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$. Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$. Potom

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a. \qquad \triangle$$

V poslední části této podkapitoly budeme hledat vzorečky pro derivace zbývajících elementárních funkcí. K nim patří i jejich inverzní funkce. Nyní proto musíme podrobněji prozkoumat vlastnosti inverzních funkcí a ukázat, jak hledat jejich derivace.

Věta 5.7 (Derivace inverzní funkce)**:** Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Důkaz. Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(d)}{f(x) - d} \right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big) \Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \qquad \text{pro } x \in f(J),\ x \neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = (f^{-1})'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$. Podle věty 4.9 o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(d)}.$$ □

Příklad: Již víme, že derivace ln je funkce $\frac{1}{x}$. ln je ale inverzní funkce k funkci e^x. Zkusme si na tomto příkladě ukázat použití předcházející věty.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato funkce je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$. Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\big(f^{-1}\big)'(f(x)) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle předcházející věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali. △

Příklad: Pro derivaci funkce arcsin platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci sin zúžené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1, 1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1, 1)$ je ale

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big)} = \sqrt{1 - x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$ △

Příklad: Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a ryze monotónní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$. Navíc je

$$\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big) = \frac{\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)}{\sin^2\big(\operatorname{arctg} x\big) + \cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

Velmi podobným způsobem bychom odvodili derivace zbývajících funkcí arccos a arccotg. Jejich derivace budou uvedeny níže v přehledné tabulce.

5.4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

Shrňme si přehledně doposud odvozené vztahy pro derivace. Uvádíme tabulku 5.1 zatím známých derivací.

Příklad: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Přímým výpočtem získáváme

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

V označených rovnostech jsme postupně použili

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy. $\triangle$

Příklad: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

V tomto případě postupujeme následovně

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x\ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' \overset{3}{=} e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{4}{=} x^x(1+\ln x).$$

Postupně jsme použili:

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = -1, -2, \ldots$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$ $f(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$ $f'(x)$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 5.1: Tabulka doposud známých derivací elementárních funkcí.

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy. △

Úprava použitá v předchozím příkladě, tedy přepis na exponenciálu se často používá právě u takovýchto druhů funkcí. Jako další příklad ještě uveďme

$$\left((2+\sin x)^{\cos x}\right)' = \left(e^{\cos(x)\ln(2+\sin x)}\right)' = \\ = e^{\cos(x)\ln(2+\sin x)} \cdot \left(-\sin(x)\ln(2+\sin x) + \frac{\cos^2(x)}{2+\sin x}\right).$$

5.5 Další poznámky

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme malou poznámku k jednostranné derivaci a k derivacím vyšších řádů.

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x\to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Příklad: Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje. △

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme derivace vyšších řádů (dokud existují)

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}\big)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad: Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \; n \geq 4.$$ △

Poznámka (*Mathematica*)**:** K výpočtu derivace lze využít příkazu `D[`f`,`x`]`, zde f je derivovaná funkce (výraz) a x proměnná, podle které se derivuje. Derivaci vyššího, n-tého, řádu lze zapsat například takto `D[`f`,{`x`,`n`}]`.

5.6 Extrémy funkce

Řada praktických problémů může být formulována jako optimalizační (minimalizační či maximalizační) úloha. Ve své nejjednodušší podobě zní následovně: různé „případy“ jsou očíslovány parametrem x a hledáme takové řešení, které minimalizuje/maximalizuje jistou funkci $f(x)$ (např. zisk). Uveďme několik jednoduchých příkladů.

- Pastevec má k dispozici 500 metrů ohradníku. Chce postavit pravoúhlou ohradu pro ovce na břehu řeky. Jaké délky stran má zvolit, aby výběh pro ovce byl co největší (tedy měl největší plochu)?
- Jsou zadána čtyři čísla a, b, c, d. Nalezněte x, které aproximuje tato čísla tak, že součet kvadrátu jeho odchylek od těchto čísel je nejmenší.
- Tuhost trámu je přímo úměrná jeho šířce a třetí mocnině jeho výšky. Jaké rozměry trámu máme zvolit, abychom z kmene o kruhovém průřezu poloměru r získali nejtužší trám?

Samozřejmě v realitě je často zapotřebí uvažovat ne jen jednu proměnnou x, ale dvě a nebo více. Řešením těchto otázek se zabývá teorie funkce více proměnných. Důležitou informací je, že hledání extrému postupuje v zásadě podle stejného scénáře jako v případě našich funkcí jedné proměnné.

Započněme výklad této problematiky přesným zavedemím pojmů minima a maxima funkce.

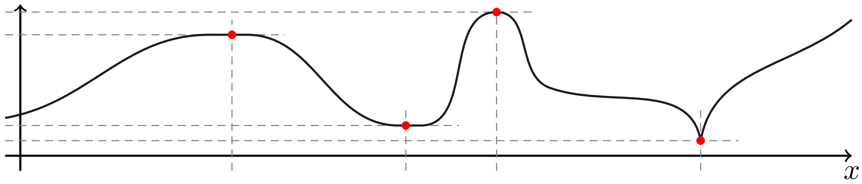
Definice 5.8: Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.

Lokální maximum a lokální minimum společně nazýváme **lokální extrém**. Následující věta dává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému. Pro lepší představu a orientaci mezi těmito typy extrémů uvádíme obrázek 5.5.



Obrázek 5.5: K definici různých typů extrémů.

Nyní se můžeme snažit odpovědět na otázku, jak extrémy funkcí hledat. První výsledek je negativního charakteru, říká nám kde zcela jistě extrémy funkce nenastávají.

Věta 5.9 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**:** Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom ale platí $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a + \varepsilon)$ a $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \varepsilon, a)$. Funkce f tedy v bodě a nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. □

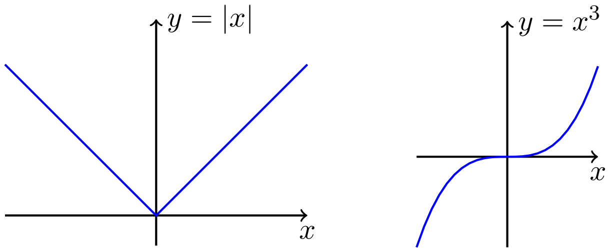
Tato věta udává pouze nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému. Zdůrazněme tento fakt pomocí následujících příkladů.

Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací)**:** Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (to vidíme přímo z definice ostrého lokálního minima: pro všechna nenulová reálná x platí $|x| > 0$ a $0 = 0$), ale její derivace v bodě 0 neexistuje (vypočteno v předchozí části textu). △

Příklad (Bod nulové derivace bez extrému)**:** Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému (opět viz definici: pro kladné reálné x platí $x^3 > 0$ a pro záporné reálné x platí $x^3 < 0$). Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$. Jinak řečeno, k tomu aby funkce v bodě a měla extrém **nestačí** aby $f'(a) = 0$. Tento omyl je **častým zdrojem chyb**. △

Grafy funkcí z předchozích dvou příkladů jsou uvedeny na obrázku 5.6.

Obecně ani nevíme, jestli daná funkce vůbec extrém má. Jedná-li se ale o funkci spojitou na uzavřeném intervalu, pak je existence extrémů zaručena následující větou.



Obrázek 5.6: Graf absolutní hodnoty (v bodě 0, kde neexistuje derivace, nabývá minima) a funkce x^3 (v bodě 0 sice má nulovou derivaci, ale v tomto bodě nenabývá extrému).

Věta 5.10 (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu)**:** Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních[2] bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

Důkaz. Již víme, že je-li f spojitá, pak obrazem uzavřeného intervalu $J = \langle a, b\rangle$ je opět uzavřený interval $f(J)$ (nebo jednoprvková množina, v tom případě je situace triviální). Vzpomeňte na větu 4.20. Krajní body tohoto intervalu $f(J)$ pak představují globální maximum, resp. minimum, příslušné funkce na příslušném intervalu. □

Tuto větu lze s výhodou použít, hledáme-li pouze největší a nejmenší hodnotu spojité funkce f na uzavřeném intervalu J a nezajímají nás další detaily o průběhu funkce f. Stačí pouze porovnat funkční hodnoty v bodech podezřelých z extrému, tedy bodech kde je derivace funkce f nulová nebo neexistuje, nebo v krajních bodech intervalu na kterém extrémy funkce zkoumáme.

Příklad: Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

$$f(0) = 2, \quad f(3/2) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globální maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$. Graf uvažované funkce je na obrázku 5.7. Povšimněte si ale, že jsme extrémní hodnoty nalezly bez jakékoliv grafické představy (kterou často nemáme k dispozici), využili jsme pouze spojitost dané funkce a uzařenost zadaného intervalu! △

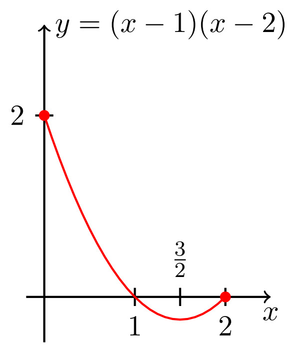
Příklad: Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Vizte obrázek 5.8. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.

Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

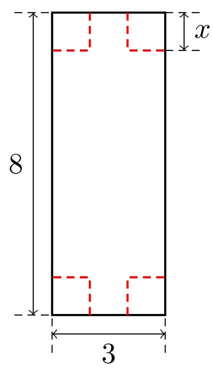
$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, 3/2\rangle$. Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a $2/3$, ovšem pouze $2/3 \in \langle 0, 3/2\rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O(2/3) = 200/27\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O(3/2) = 0$. △

[2] Krajní body také patří do kategorie bodů, kde derivace neexistuje, protože funkce není definována na celém jejich okolí a proto nemůže mít derivaci. Explicitně je ale uvádíme, aby na ně případný čtenář nezapomněl.



Obrázek 5.7: Ukázka globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu.



Obrázek 5.8: Konstrukce krabičky z papíru tvaru obdélníka.

Na závěr této podkapitoly ještě poznamenejme, že uzavřenost intervalu v předchozí větě 5.10 je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum. Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$

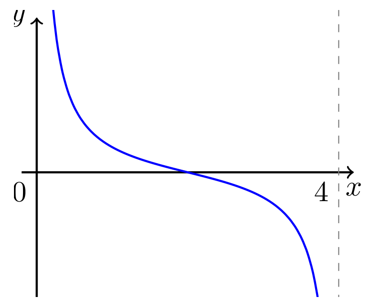
Graf této funkce je uveden na obrázku 5.9.

5.7 Věta o přírůstku funkce

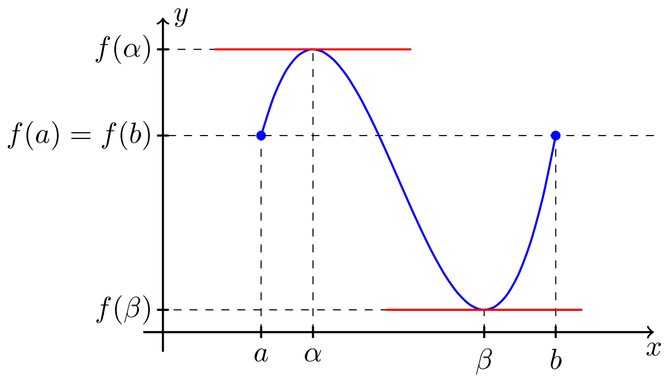
Intuitivně (z geometrické interpretace derivace jako tečny) tušíme, že pokud je derivace funkce kladná na intervalu I, pak je funkce rostoucí na intervalu I. Pomocí Lagrangeovy věty, kterou zanedlouho zformulujeme, bude snadné správnost této intuice ověřit.

Pozorování: pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x. Viz obrázek 5.10.

Věta 5.11 (Rolleova)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky



Obrázek 5.9: Funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí mít minimum ani maximum.



Obrázek 5.10: Demonstrace k Rolleově větě.

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (to jak víme, plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

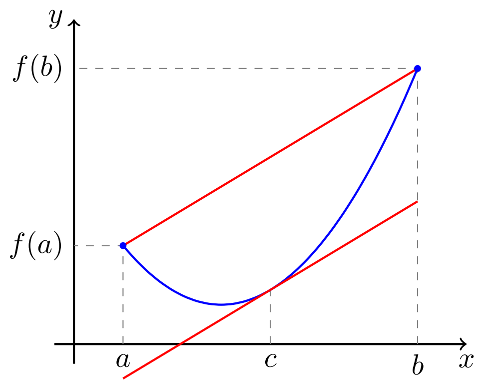
Protože $f(a) = f(b)$ leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$. Skutečně, funkce f má totiž derivaci v každém bodě intervalu (a, b). □

Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(b) - f(a)$ (tj. změna funkční hodnoty mezi a a b). Lze ho nějak odhadnout pomocí derivace? Odpověď na tuto otázku je obsahem následující věty[3].

Věta 5.12 (Lagrangeova, O přírustku funkce)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

[3] Uveďme ještě jeden způsob jak se dívat na následující větu. Pokud jsme se v daném časovém intervalu pohybovali průměrnou rychlostí v, pak musí existovat časový okamžik v němž naše okamžitá rychlost byla rovna v.



Obrázek 5.11: Demonstrace k Lagrangeově větě.

Potom existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, nebo ekvivalentně $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Důkaz. Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a,b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a,b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

5.8 Důsledky pro vyšetřování průběhu funkce

Pomocí věty o přírůstku funkce (věta 5.12) můžeme přesně zformulovat vztah mezi monotonií a první derivací funkce. Nejprve si zaveďme vhodné značení.

Definice 5.13: Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a,b). Značíme ho $J^\circ = (a,b)$.

Věta 5.14: Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení,

1. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,
5. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J.

Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky. Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2\rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Tudíž

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \qquad \square$$

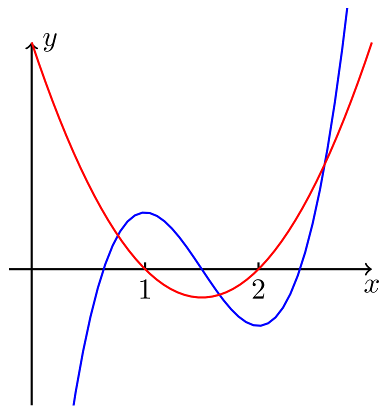
Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste či klesá rozhoduje znaménko její derivace. Pro lepší představu uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Porovnejte funkci a její derivaci na obrázku 5.12.



Obrázek 5.12: Funkce a její derivace. Znaménko derivace rozhoduje o monotonii funkce.

Zjistili jsme, že první derivace funkce f souvisí s monotonií funkce f. Nyní ukážeme, že druhá derivace funkce f dále souvisí s tvarem grafu funkce f. Nejprve zaveďme potřebné pojmy.

Definice 5.15: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní** (resp. **konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

Definice 5.16: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **ryze konvexní** (resp. **ryze konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Očividně, f je konkávní na intervalu J, právě když $-f$ je konvexní na intervalu J. Stačí se tedy soustředit například na konvexní funkce.

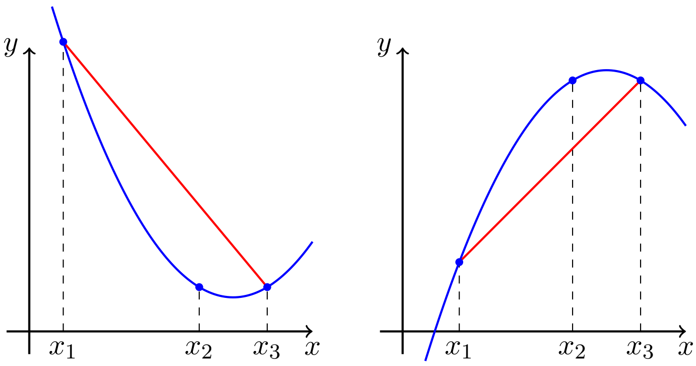
K osvětlení terminologie uveďme etymologický význam obou pojmů. *Convexum* má v latině význam údolí a *concavum* význam výdutě. Ukázka konvexní a konkávní funkce je dále uvedena na obrázku 5.13.

Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod (nebo na) této přímce pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$



Obrázek 5.13: Konvexní (vlevo) a konkávní (vpravo) funkce na intervalu.

Často bývá zvykem vyjádřit konvexitu alternativním způsobem. Uvažme body $x_1 := x < y =: x_3$ a bod $x_2 := \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0,1)$ ležící mezi x a y. Potom lze předchozí nerovnost přepsat do tvaru

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)(y-x) \leq f(x)(\lambda y - \lambda x) + f(y)((\lambda-1)x + (1-\lambda)y),$$

což po jednoduché úpravě přechází na

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Není těžké rozmyslet, že f je konvexní na J, právě když pro každé $x, y \in J$ a $\lambda \in (0,1)$ platí předchozí nerovnost.

Věta 5.17: Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě intervalu J°.

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Důkaz $\Leftarrow$. Z předpokladu $f''(x) \geq 0, x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Buďte $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$. Dle Lagrangeovy věty existují ξ, η splňující $x_1 < \eta < x_2 < \xi < x_3$ a platí

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi) \geq f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Po elementárních úpravách

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Tím je dokázán i druhý bod věty ($\geq$ se změní na $>$). $\square$

Důkaz $\Rightarrow$. Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $x_2 \in J^\circ$ splňující $f''(x_2) = \lim_{x\to x_2} \frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0$. Existuje tedy $H_\delta(x_2) \subset J$ takové, že

$$\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0 \quad \text{kdykoliv } x \in H_\delta(x_2) \smallsetminus \{x_2\}.$$

Celkem tedy $f'(x) > f'(x_2)$ kdykoliv $x \in (x_2 - \delta, x_2)$ a $f'(x_2) > f'(x)$ kdykoliv $x \in (x_2, x_2 + \delta)$. Položme $x_1 = x_2 - \delta$ a $x_3 = x_2 + \delta$. Pak existují η a ξ pro které $x_2 - \delta < \eta < x_2 < \xi < x_2 + \delta$ a

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi) < f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Což po elementárních úpravách dává spor s konvexností,

$$f(x_2)(x_3 - x_1) > f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1). \qquad \square$$

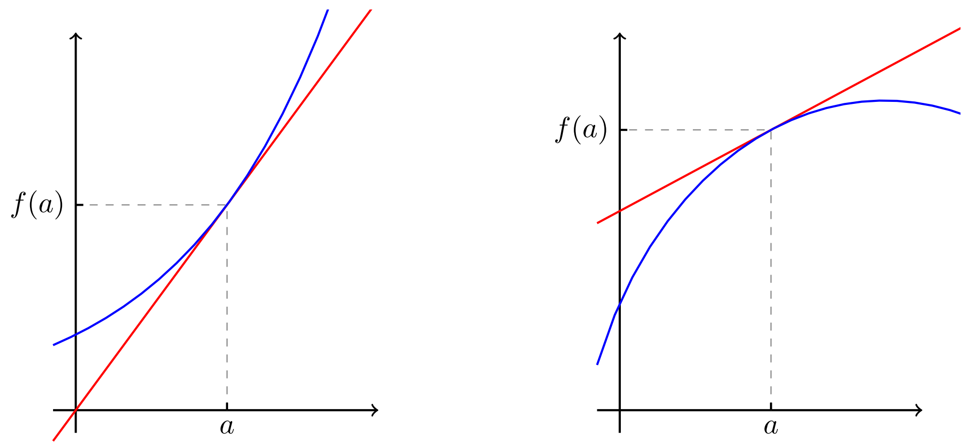
Poznámka: Stejná věta platí i pro konkávní funkce. V tomto případě je znaménko druhé derivace (jejíž existence je předpokladem věty) záporné.

Definice 5.18: Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo na ní, pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

Poznámka: Konvexnost na intervalu nevyžaduje diferencovatelnost, na rozdíl do konvexnost i v bodě, která vychází z pojmu tečny (kterou konstruujeme pomocí derivace). Podobně bychom mohli definovat ryzí konvexnost/konkávnost funkce v bodě. Ale pro naše účely to není nutné. Pro ilustrace bodové konvexity/konkavity uvádíme obrázek 5.14.



Obrázek 5.14: Konvexní a konkávní funkce.

Jaký je vztah mezi konvexitou na intervalu a konvexitou v každém bodě intervalu? Na to odpovídá následující věta.

Věta 5.19: Buď f funkce konvexní na intervalu J diferencovatelná v každém bodě J°. Potom je f konvexní v každém bodě intervalu J°.

Důkaz. Buď $x, c \in J^\circ$, $x \neq c$ a $\lambda \in (0, 1)$, potom

$$f(\lambda c + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(c) + (1 - \lambda) f(x).$$

Tuto nerovnost lze přepsat do tvaru

$$(x - c) \cdot \frac{f(\lambda c + (1 - \lambda)x) - f(c)}{\lambda c + (1 - \lambda x) - c} = \frac{f(\lambda c + (1 - \lambda)x) - f(c)}{1 - \lambda} \leq -f(c) + f(x).$$

Podle věty o limitě složené funkce pro $\lambda \to 1$ ihned dostáváme nerovnost $(x - c) f'(c) \leq -f(c) + f(x)$, čili $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$. Funkční hodnota v bodě x je tedy větší než funkční hodnota ve stejném bodě lineární funkce jejíž graf je tečnou funkce f v bodě c. $\square$

Z předchozí věty ihned plyne následující důsledek.

Důsledek 5.20: Buď f funkce diferencovatelná v každém bodě intervalu J a nechť $f'(c) = 0$ pro jisté $c \in J^\circ$.

- Pokud je f konvexní na intervalu J, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní na intervalu J, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. □

Poznámka: Předchozí věta se často používá pokud víme, že f má kladnou (nebo zápornou) druhou derivaci na okolí bodu c. Pokud bychom požadovali ryzí konvexitu/konkavitu, pak dostaneme ostrá lokální minima/maxima.

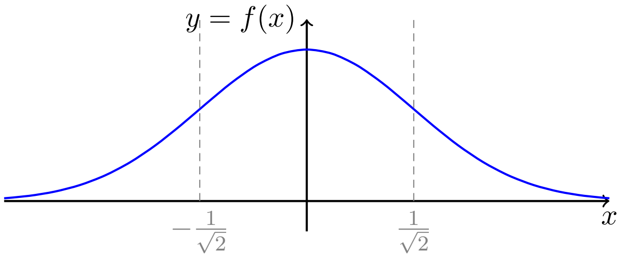
Body, kde se mění konvexita na konkavitu, případně naopak, jsou důležité pro tvar grafu funkce. Zavádí se pro ně proto zvláštní označení.

Definice 5.21: Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c - \delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c + \delta)$, nebo naopak.

Příklad: Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = e^{-x^2}$. Je potřeba vypočíst druhou derivaci zadané funkce,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace je kladné pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ a záporné pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce f je proto konvexní na $\big(-\infty, -{}^1\!/\!\sqrt{2}\big)$ a $\big({}^1\!/\!\sqrt{2}, +\infty\big)$ a konkávní na $\big(-{}^1\!/\!\sqrt{2}, {}^1\!/\!\sqrt{2}\big)$. Inflexními body tedy jsou body ${}^1\!/\!\sqrt{2}$ a $-{}^1\!/\!\sqrt{2}$. Funkce je znázorněna na obrázku 5.15. △



Obrázek 5.15: Inflexní body

Konečně, poslední vlastností grafu, kterou bude zkoumat, je existence asymptot. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy zavedené v následující definici.

Definice 5.22: Řekneme, že funkce f má v bodě a **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Poznámka: Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně

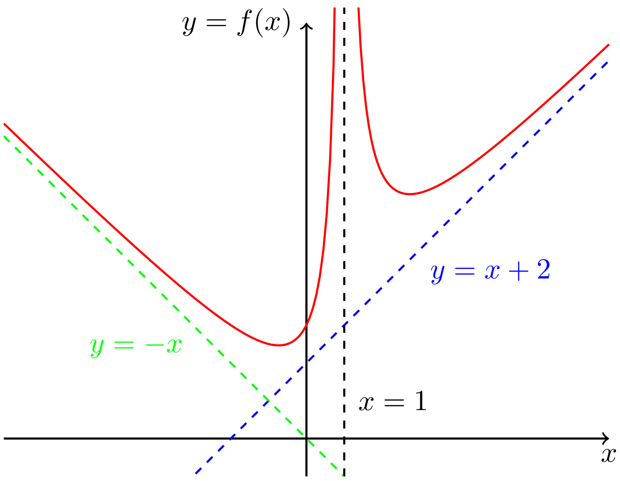
1. $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k$ a proto
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{5.2}$$

2. Podobně
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx, \tag{5.3}$$
kde k jsem spočetli v předchozím bodu.

Příklad: Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$. Proberme postupně možné body, kde se může mít zadaná funkce asymptotu.

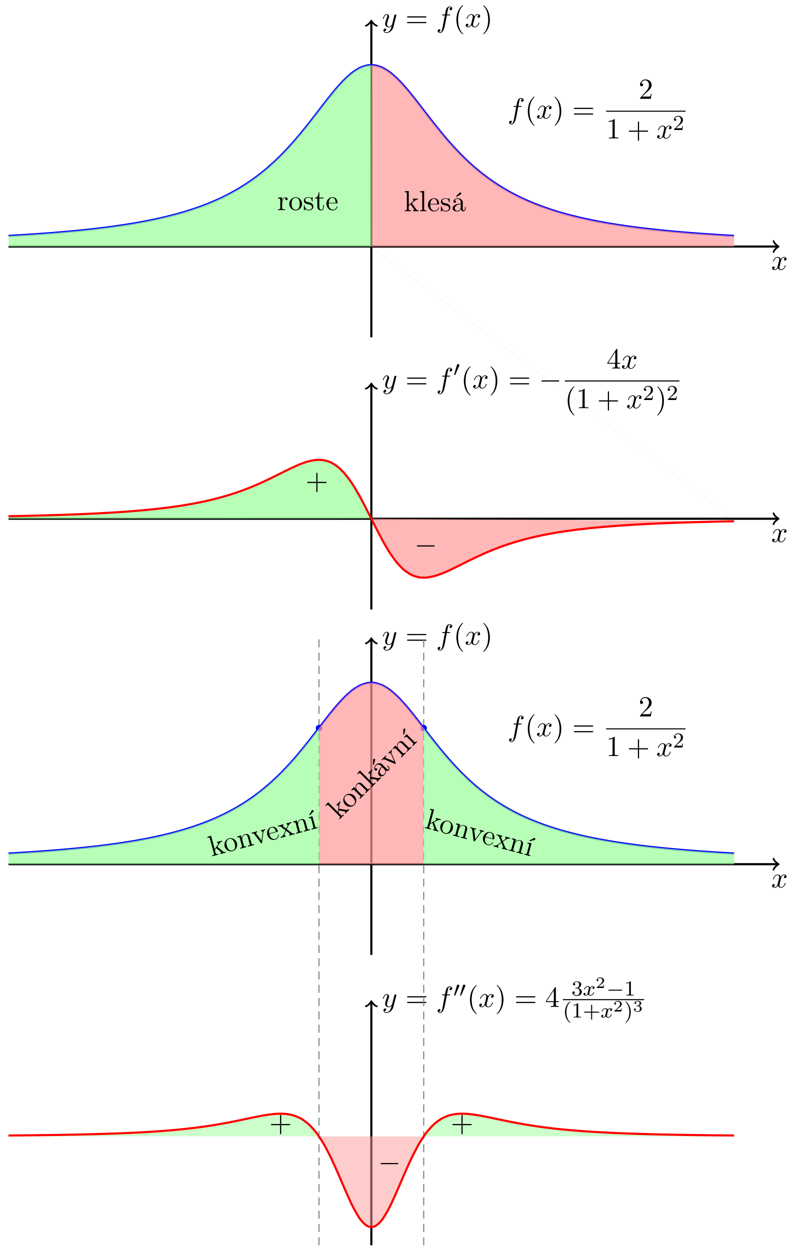
- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x\to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1, \\ q &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2. \end{aligned}$$
- Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x^2-x} + \frac{1}{x} = -1, \\ q &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1)\cdot x = 0. \end{aligned}$$

Nalezené asymptoty jsou uvedeny na obrázku 5.16. △



Obrázek 5.16: Asymptoty funkce.

Shrňme si vztah mezi funkcí a její první a druhou derivací na několika názorných ukázkách, vizte obrázek 5.17.



Obrázek 5.17: Vztah první derivace a monotonie funkce, druhé derivace a konvexnosti resp. konkávnosti.

Poznámka: Na závěr této kapitoly poznamenejme co máme na mysli pod **vyšetřováním průběhu funkce**. Při vyšetřování průběhu funkce f zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech, resp. nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

5.9 l'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit neurčitých výrazů se často hodí l'Hospitalovo pravidlo.

Věta 5.23 (l'Hospitalovo pravidlo)**:** Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$ nebo $\lim\limits_a |g| = +\infty$
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Důkaz. Důkaz vynecháváme. □

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Použití l'Hospitalovala pravidla je korektní. Jednalo se o limitu typu $\frac{0}{0}$, limita podílů derivací existuje, oba podíly jsou definovány na okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (podíl derivací dokonce definovaný i v 0). △

Příklad: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln(x)$. Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Opět poznamenejme, že l'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Po vhodné úpravě se jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, limita podílu derivací existuje a oba podíly jsou definovány na pravém okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (např. $(0,1)$).

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že pokud bychom výraz upravili takto,

$$x\ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}},$$

tak bychom sice získali limitu typu $\frac{0}{0}$, ale limitu podílu derivací bychom vypočítat nedokázali. Dostali bychom se tedy do slepé uličky. △

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Jedná se vždy o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, podíly jsou definovány na okolí bodu $+\infty$ a poslední z limit existuje, tudíž existují i všechny předchozí. △

Poznámka: Upozorněme na častý omyl vyskytující se u příkladů podobných předchozímu. Často se objevuje argument „limita je rovna $+\infty$ protože exponenciála roste rychleji než polynom“. To je sice dobrá intuice, ale není dostatečně přesná. Jak rychleji musí růst čitatel vůči jmenovateli, aby limita byla $+\infty$? Na to intuice vůbec nestačí. Například v limitě

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x+\sqrt{x}}$$

také čitatel roste rychleji než jmenovatel, ale hodnota této limity je $\frac{1}{2}$.

Na předchozí příklad je nutné se dívat právě naopak. Pomocí l'Hospitalova pravidla jsme vypočetli limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Protože tato limita vyšla $+\infty$, **můžeme tvrdit**, že exponenciála e^x roste rychleji než x^2. Všimněte si, že původní intuitivní úvaha jde přesně opačným směrem.

Příklad (Důležitost předpokladů)**:** Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \stackrel{2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita nalevo od $\stackrel{2}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2. \qquad \triangle$$

Příklad (Bludný kruh)**:** V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

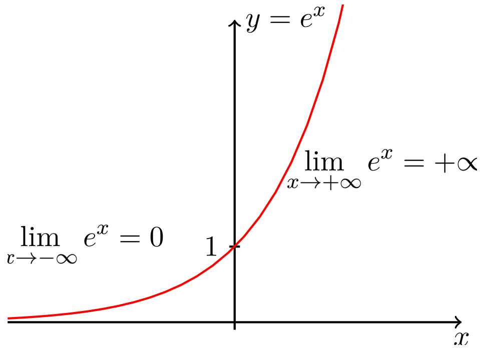
Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali. Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1. \qquad \triangle$$

5.10 Příklady

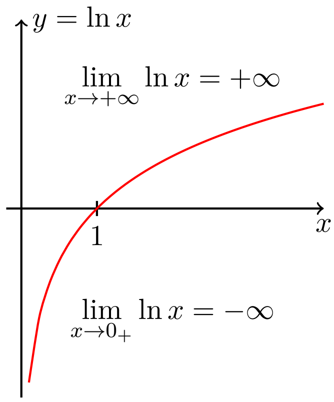
Nejprve si ukážeme vyšetřování průběhu na velmi jednoduchých příkladech.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$. Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její přímkou je $y = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 5.18. $\triangle$



Obrázek 5.18: Graf funkce e^x.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$. Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 5.19. $\triangle$



Obrázek 5.19: Grafu funkce $\ln x$.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}.$$

Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0). Z první derivace podle znaménka určíme typ monotonie.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$). Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

Nyní můžeme načrtnout graf funkce f, vizte obrázek 5.20. △

Příklad: Tuhost T trámu s obdélníkovým průřezem je úměrná součinu jeho šířky (horizontální rozměr) w a třetí mocnině tloušťky (vertikální rozměr) t. Při jakých rozměrech lze dosáhnout největší tuhosti trámu, máme-li k dispozici strom o kruhovém průřezu s poloměrem R?

Parametrizujme trám pomocí parametru x podle obrázku 5.21. Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R\rangle$, resp. $x \in \langle 0, R\rangle$.

Tudíž,

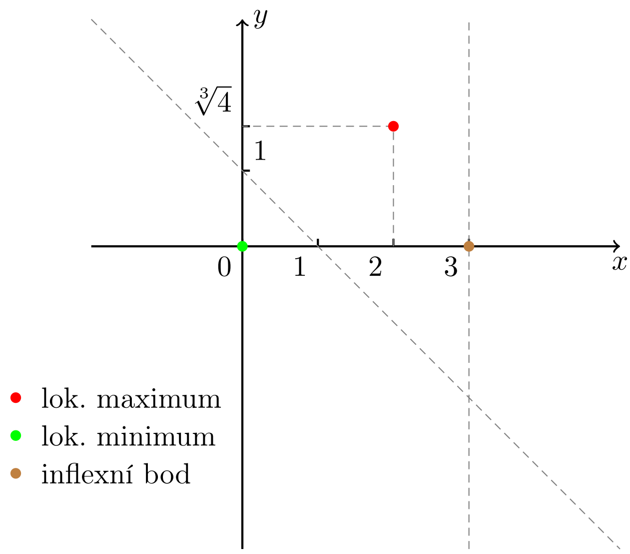
$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}.$$

Hledáme extrém této funkce, derivací je

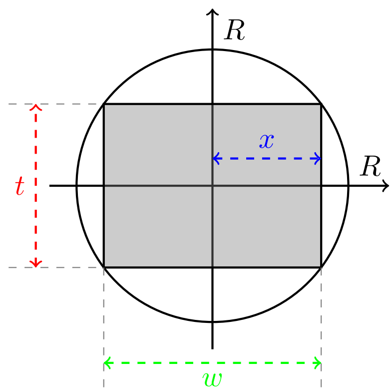
$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left(\left(R^2 - x^2\right)^{3/2} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(R^2 - 4x^2\right).$$

Nulovým bode derivace je bod $x_* = \frac{R}{2}$. Funkci T vyšetřujeme pouze na intervalu J. Vidíme, že na intervalu $\left(0,\, \frac{R}{2}\right)$ funkce T roste na intervalu $\left(\frac{R}{2}\,,\, R\right)$ klesá. V bodě x_* tudíž nastává lokální maximum. Pro extremální rozměry trámu platí

$$w_* = 2x_* = R \quad \text{a} \quad t_* = 2\sqrt{R^2 - x_*^2} = \sqrt{3}R.$$ △



Obrázek 5.20: Průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.



Obrázek 5.21: Parametrizace problému s trámem.

Příklad (Elementární metoda nejmenších čtverců)**:** Nechť je zadáno n čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Nalezněte $x \in \mathbb{R}$ tak, aby součet kvadrátů odchylek x od každého a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, byl minimální.

Označme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Pro derivaci platí (derivujeme součet)

$$f'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^{n} \left((x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^{n} 2(x - a_i)i.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ je $x_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Protože $f''(x) = 2n > 0$ nastává bodě x_* minimum funkce f. △

Příklad (Newtonův trojzubec)**:** Vyšetřete průběh funkce (včetně konvexnosti/konkávnosti) funkce
$$f(x) = \frac{1}{x} + x^2.$$
Načrtněte graf této funkce.

Definičním oborem je očividně množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f je spojitá v každém bodě množiny D_f. Vypočtěme derivaci,
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$
Znaménko derivace je, vzhledem ke kladnosti jmenovatele, kontrolováno výrazem $2x^3 - 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ x > 2^{-1/3}, \\ f'(x) < 0 \ &\Leftrightarrow\ x < 2^{-1/3} \text{ a } x \neq 0, \\ f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ x = 2^{-1/3}. \end{aligned}$$

Funkce f je rostoucí na intervalu $(2^{-1/3}, +\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 2^{-1/3})$. V bodě $a = 2^{-1/3}$ má tedy funkce f lokální minimum (na pravém okolí bodu a je rostoucí, na levém okolí bodu a je klesající a je spojitá v bodě a). Podívejme se na limity v nekonečnech a v bodě 0,
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} + x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} + x^2 = \pm\infty.$$
Funkce f není spojitě dodefinovatelná v bodě 0. Přímka s rovnicí $x = 0$ je asymptotou funkce f v bodě 0. Asymptoty v nekonečnech neexistují,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} + x = \pm\infty.$$

Vyšetřeme konvexitu a konkavitu. Pro druhou derivaci platí

$$f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = 2\frac{x^3 + 1}{x^3}.$$

Odtud vidíme, že

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ x < -1 \text{ nebo } 0 < x, \\ f''(x) < 0 \ &\Leftrightarrow\ -1 < x < 0, \\ f''(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ x = -1. \end{aligned}$$

Funkce f je proto konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní na intervalu $(-1, 0)$. V bodě $x = -1$ má inflexní bod.

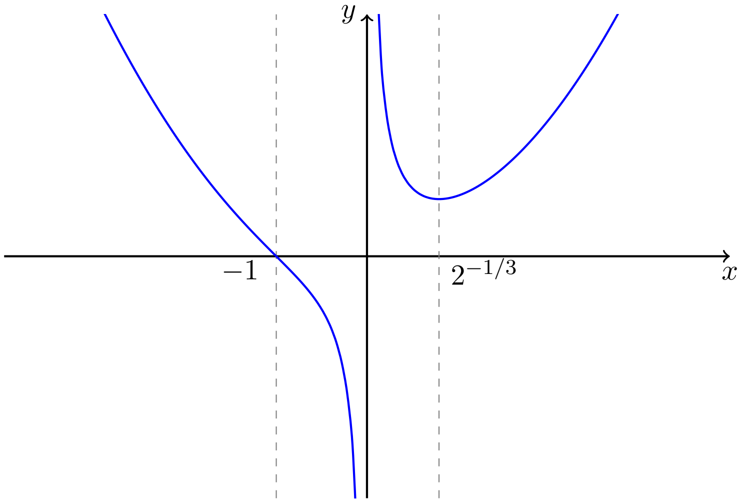
Na základě těchto informací nyní můžeme nakreslit kvalitní graf (viz obrázek 5.22). △

5.11 Kubická interpolace: Splines

Jak v těchto prezentacích a poznámkách vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení například funkce $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$

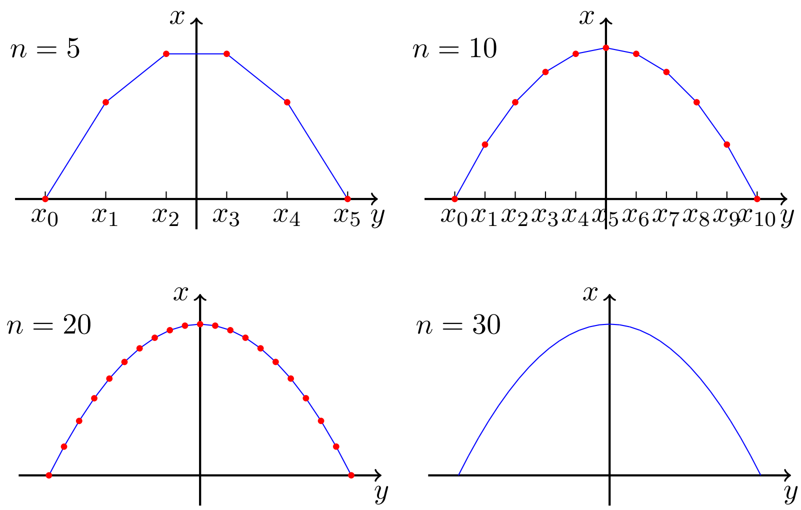
1. zvolme $n + 1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, pro vhodně zvolené n,



Obrázek 5.22: Newtonův trojzubec

2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, přímkou.

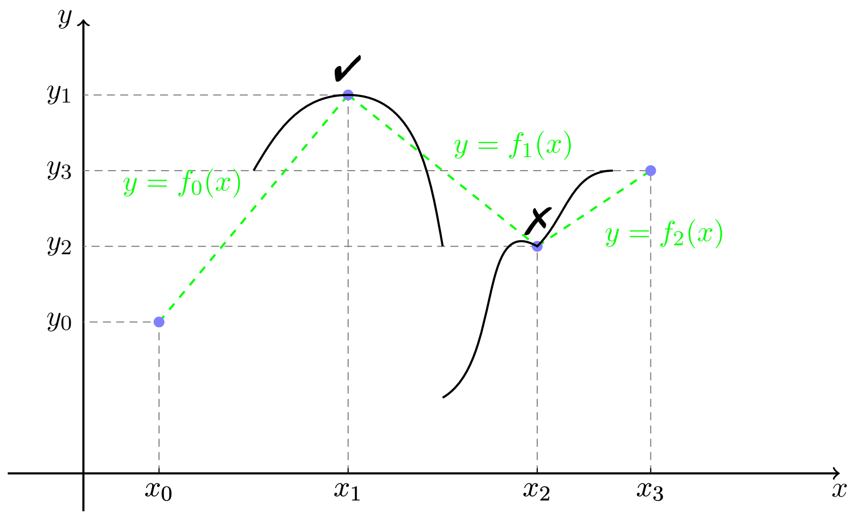
Pro oku lahodící výsledek je však nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou. Porovnejte různé výsledky na obrázku 5.23.



Obrázek 5.23: Lineární interpolace.

Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž jednoznačně zadána dvěma body. Místo přímky (lineární funkce $y = ax + b$) se často využívá polynomů třetího stupně, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polynom 3. stupně je, na rozdíl od lineární funkce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit? Jako demonstrativní příklad si ukážeme způsob jak interpolovat křivku mezi čtyřmi předem zadanými body (které jsme mohli získat např. vzorkováním předem dané funkce).

Nechť jsou zadány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Body spojíme třemi kubickými polynomy $y = f_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0$ a podobně pro $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Tj. je



Obrázek 5.24: Interpolace.

třeba určit 12 neznámých. Chceme, aby křivka byla „co nejhladší“. Zřejmým požadavkem tedy je

$$f_0(x_0) = y_0, \quad f_0(x_1) = f_1(x_1) = y_1, \quad f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_2 \text{ a } f_2(x_3) = y_3.$$

Dále požadujeme, aby na sebe křivky navazovaly se stejným sklonem, tj.

$$f_0'(x_1) = f_1'(x_1) \text{ a } f_1'(x_2) = f_2'(x_2),$$

a konvexitou/konkavitou]

$$f_0''(x_1) = f_1''(x_1) \text{ a } f_1''(x_2) = f_2''(x_2).$$

Tato situace je znázorněna na obrázku 5.24. Celkem jsme sestavili 10 rovnic pro 12 neznámých. Pokud dovolíme uživateli předepsat sklon křivky na krajích, tak získáme další dvě rovnice, $f_0'(x_0) = \alpha$ a $f_2'(x_3) = \beta$, a celkem tak máme 12 rovnic pro 12 neznámých.

Takto získaná soustava je lineární a k jejímu řešení můžeme (budeme moci) využít metod Lineární algebry. Na EDUXu BI-ZMA si může zaujatý čtenář stáhnout interaktivní demonstraci v *Mathematica* a detailněji prozkoumat zde popsaný postup. Poznamenejme, že *Mathematica* ve výchzím nastavení používá právě kubickou interpolace. Toto nastavení lze změnit nastavením parametru `InterpolationOrder` funkce `Plot`.

5.12 Separace kořenů

Pokud máme pro funkci f spojitou na intervalu J řešit rovnici

$$f(x) = 0,$$

pak máme k dispozici metodu půlení intervalu. Abychom ji ale mohli použít, musíme nalézt intervaly $\langle a, b\rangle \subset J$ tak, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Metoda půlení intervalu pak vždy dá aspoň jeden kořen, v intervalu $\langle a, b\rangle$ jich však může být více. Je proto vhodné kořeny **separovat**, čili vždy nalézt pro interval $\langle a, b\rangle$ tak, že v něm leží právě jeden kořen.

Příklad: Určete počet reálných kořenů polynomu $f(x) = x^5 - 5x + 2$ a separujte je.

Řešíme tedy rovnici

$$f(x) = x^5 - 5x + 2 = 0.$$

Definičním oborem funkce f je celé $\mathbb{R}$, funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech jsou

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^5\left(1-\frac{5}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^5 \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty. \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \text{(analogicky)} = +\infty.\end{aligned}$$

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4-1) = 5(x^2+1)(x^2-1) = 5(x^2+1)(x-1)(x+1).$$

Shrnujeme, že

- pro $x \in (-\infty,-1)$ je $f'(x) > 0$, tudíž na tomto intervalu f **roste**,
- pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ je $f'(x) < 0$, tudíž na tomto intervalu f **klesá**,
- pro $x \in (1,+\infty)$ je $f'(x) > 0$, tudíž f na tomto intervalu **roste**

Proto

- v bodě -1 je lokální maximum s hodnotou $f(-1) = 6$,
- v bodě 1 je lokální minimum s hodnotou $f(1) = -2$.

Jelikož $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ uzavíráme, že v každém z intervalů

$$(-\infty,-1\rangle, \quad \langle -1,1\rangle, \quad \langle 1,+\infty)$$

leží **právě jeden kořen**. Rovnice má právě 3 kořeny. Protože navíc $f(-2) < 0$ a $f(2) > 0$, lze pro metodu půlení intervalu použít intervaly

$$\langle -2,-1\rangle, \quad \langle -1,1\rangle, \quad \langle 1,2\rangle. \qquad \triangle$$

5.13 Newtonova metoda: Příklad

K numerickému řešení rovnic typu $f(x) = 0$ existuje mnoho metod. My zatím známe jen metodu půlení intervalu. V této kapitole si ukážeme Newtonovu[4] metodu. Newtonův přístup podrobně prozkoumáme na následujícím příkladu.

> Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

Zamyslete se, jak tento problém vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla? Tedy operace, které může provádět i člověk s pomocí papíru. Tato otázka může vyvstat v praxi: máme-li zjistit jak velký má být poloměr kulového tankeru o daném objemu V, dostávámer $= \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$. Pro krychli dostaneme délku hrany rovnou $a = \sqrt[3]{V}$.

Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$. Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x **řešením rovnice**

$$f(x) = 0.$$

Tuto bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body by jste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. **Newtonovu metodu**.

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

[4] Sir Isaac Newton, anglický fyzik a matematik, 1642 – 1727.

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

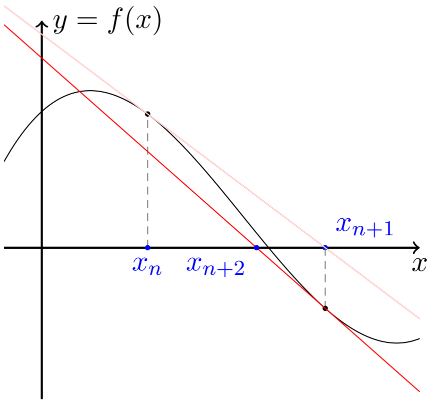
$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

3. Průsečík tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Opakuj s x_{n+1} místo x_n.

Graficky je tento proces znázorněn na obrázku 5.25.



Obrázek 5.25: Dvě iterace Newtonovy metody.

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Ihned se však nabízí následující otázku:

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost (x_n)?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědí na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Shrňme si dosavadní výsledky. Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0, +\infty)\big) = (-c, +\infty)$ a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice $f(x) = 0$. (Tj. vyšetřili jsme průběh funkce f a zjistili jsme, že rovnice má právě jedno řešení.)

- Konverguje-li posloupnost (x_n) ke konečné kladné limitě a, potom

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}.$$

Tudíž a je hledané řešení,

$$a^3 = c, \quad \text{nebo-li} \quad f(a) = 0.$$

Nyní je tedy otázkou, jestli naše posloupnost (x_n) skutečně konverguje.

Věta 5.24 (Vlastnosti (x_n))**:** Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz. Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost (x_n) je klesající:
  $$x_{n+1} - x_n = \tfrac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$
  a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.
- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod. □

Nyní víme, že posloupnost konverguje nezávisle na volbě první aproximace. To je dobré, ale k praktickému použití nestatečné. Kdy máme iteraci zastavit? Je potřeba odhadnout chybu mezi členy posloupnosti a skutečnou (neznámou) hodnotou hledané třetí odmocniny.

Důsledek 5.25 (Odhad chyby)**:** Buď (x_n) posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots.$$

Důkaz. Z předešlé věty víme, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jistě platí $\sqrt[3]{c} \leq x_{n+1} \leq x_n$. Potom pro tato n platí i

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{\leq 0} \leq 2(x_n - x_{n+1}). \quad \square$$

Poznámka: Toto je pro praktické účely **velmi** důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím **dodržet požadovanou přesnost**.

Shrňme si vlastnosti Newtonovy metody aplikované na problém hledání třetí odmocniny.

1. Posloupnost (x_n) zadaná rekurentně vztahem

   $$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   konverguje pro libovolně zvolené x_1 k číslu $\sqrt[3]{c}$.

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.714285714285714285714285714285714286
x_3	3.247846429664611482793300975119156940
x_4	2.386431304900375939356688957580011122
x_5	2.000666416795918176357774580392267670
x_6	1.916722395612086993699326262678646002
x_7	1.912938676720493702886648330496511714
x_8	1.912931182801746647022804241458421545
x_9	1.912931182772389101199567386596418931
x_{10}	1.912931182772389101199116839548760304
$\sqrt[3]{7}$	1.912931182772389101199116839548760282

Tabulka 5.2: Výpočet třetí odmocniny ze sedmi pomocí Newtonovy metody. Poslední řádek obsahuje přesnou hodnotu zaokrouhlenou na 36 desetinných míst.

2. Chybu mezi x_n a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ lze odhadnout pomocí posledních dvou napočtených členů:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

   Tato informace nám umožňuje výpočet zastavit po dosažení požadované přesnosti.

Jako ukázku použití metody uvádíme tabulku 5.2 s výpočtem třetí odmocniny z čísla 7. Jako první iteraci volíme číslo 7 samotné. To není optimální volba.

Na výpočtu v tabulce 5.2 lze pozorovat, že od 6. iterace se počet správných cifer přibližně zdvojnásobuje. Tento efekt nazýváme **kvadratickou konvergencí** a přesně ho pro naši posloupnost formulujeme níže. Důkaz nyní již vynecháme.

Věta 5.26: Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2.$$

Je-li tedy chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10}!

Newtonova metoda: záludnosti

Rekurentní posloupnost pocházející z Newtonovy metody se pro „špatně“ zvolenou počáteční podmínku může chovat neočekávaně. Například může oscilovat (tj. posloupnost vůbec nebude mít limitu), nebo může divergovat do nekonečna.

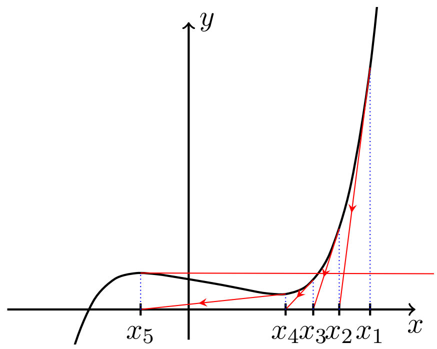
Příklad: Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

Na obrázku uvádíme prvních několik členů této rekurentní posloupnosti △

n	x_n
1	2.
2	1.6595744680851063
3	1.3729685700681316
4	1.0686067391904803
5	−0.5293373794223353
6	169.52057927559713
7	135.65665311569666



Obrázek 5.26: Patologické chování posloupnosti aproximací generovaných Newtonovou metodou. Problém zřejmě spočívá ve špatné volbě počáteční aproximace.

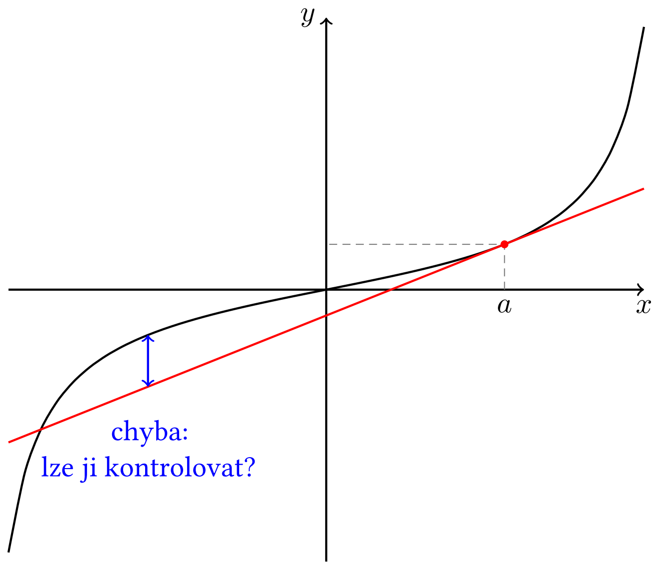
Kapitola č. 6

Taylorovy polynomy

Polynom; Taylorův polynom; Taylorův vzorec; zbytek v Taylorově vzorci; Peanův tvar zbytku; Lagrangeův tvar zbytku; přibližné výpočty; mocninná řada; poloměr konvergence.

6.1 Aproximace funkcí pomocí polynomů

Tečna funkce f v bodě a představuje tzv. lineární aproximaci funkce f v bodě a. V blízkosti bodu a dobře vystihuje chování funkce f. Graf funkce a její tečny je uveden na obrázku 6.1.

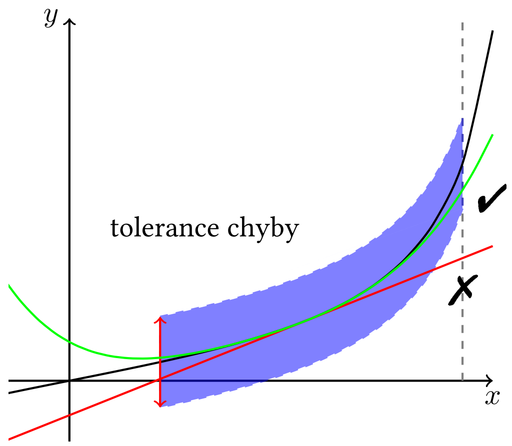


Obrázek 6.1: Tečna jakožto lineární aproximace funkce. Lze očekávat, že souhlas je dobrý na malém okolí bodu, kde uvažujeme tečnu. Jak odhadnout chybu mezi funkcí a aproximací?

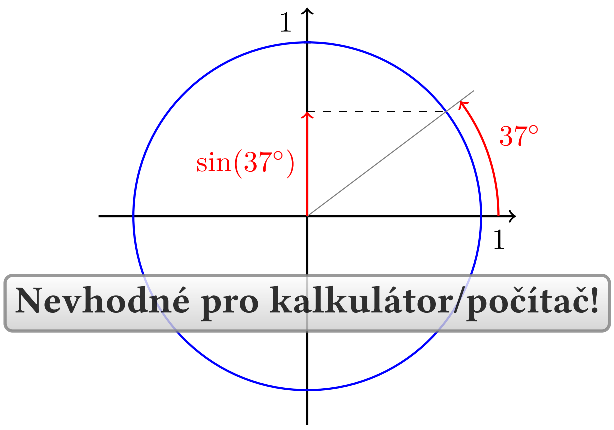
Pokud chceme funkce aproximovat i na větších intervalech, zřejmě nevystačíme pouze s přímkami, vizte obrázek 6.2. Nabízí se uvažovat místo polynomů prvního stupně (přímky) polynomy vyšších stupňů. V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak tyto aproximační polynomy zkonstruovat. S pomocí derivací vyšších stupňů se naučíme sestrojit tzv. Taylorovy polynomy, které představují v jistém smyslu nejlepší možnou aproximaci k dané funkci.

Typickým využitím Taylorových polynomů je úloha vypočíst hodnotu dané funkce s předem zadanou přesností pouze pomocí algebraických operací sčítání a násobení (dělení). Tedy například: Jak určit hodnotu $\sin(37°)$?

Podle známé geometrické definice funkce $\sin$ k odpovědi na tuto otázku potřebujeme použít pravítko, kružítko a úhloměr. Přesnost „výpočtu" je pak dána přesností našich nástrojů. Vizte obrázek 6.3.



Obrázek 6.2: Aproximace zadané funkce (černá křivka) pomocí polynomu na zadaném intervalu se zadanou přesností.



Obrázek 6.3: Geometrická definice funkce $\sin$ pomocí jednotkové kružnice je nevhodná pro výpočetní aplikace.

6.2 Taylorův polynom

Nejprve si připomeňme pojem polynomu, který bude v celé této kapitole hrát centrální roli.

Definice 6.1 (Polynom)**:** Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme číslo n **stupněm polynomu** p. Jsou-li všechny koeficienty a_k, $k = 0, \ldots, n$ nulové, nazýváme p **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Podstatnou výhodou polynomů je fakt, že k vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení. Navíc polynom stupně n je zadán $n + 1$ konstantami.

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně[1].

2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Pokusme se nyní podívat na tečnu z jiného úhlu. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Je to přímka nejvíce připomínající funkci f v okolí bodu a. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pro funkce f a g platí

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$

Tj. **funkce** f a její **tečna v bodě** a mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě a.

Přirozeně se nabízí otázka proč neuvažovat polynom vyššího stupně s podobnou vlastností? Nechť funkce f má derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k.$$

Je potřeba určit konstanty a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ tak, aby derivace polynomu a funkce v bodě a až do řádu n včetně byly shodné. Pro funkční hodnoty derivací polynomu p v bodě a platí

$$\begin{aligned}
f(a) &= p(a) && \Longrightarrow && a_0 = f(a)\\
f'(a) &= p'(a) = a_1 && \Longrightarrow && a_1 = f'(a)\\
f''(a) &= p''(a) = 2a_2 && \Longrightarrow && a_2 = \frac{1}{2} f''(a)\\
f^{(k)}(a) &= p^{(k)}(a) = k! a_k && \Longrightarrow && a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Uzavíráme, že hledaný polynom p požadovaných vlastností je tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Shrňme si toto pozorování do následující věty.

Věta 6.2: Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom $T_{n,a}$ stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tento polynom má tvar

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

a nazýváme ho **n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a.**

[1] Slovíčko „lineární“ výše používáme ke zdůraznění, že grafem dané funkce je přímka, lineární objekt. Nejedná se o lineární zobrazení ve smyslu Lineární algebry.

Důkaz. Existenci i jednoznačnost jsme dokázali v předchozích odstavcích. □

Příklad: Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě 0.
Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = e^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k. \qquad \triangle$$

Poznámka (Značení)**:** Pokud $a = 0$, budeme pro jednoduchost místo $T_{n,0}$ psát pouze T_n.

Příklad: Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.
Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

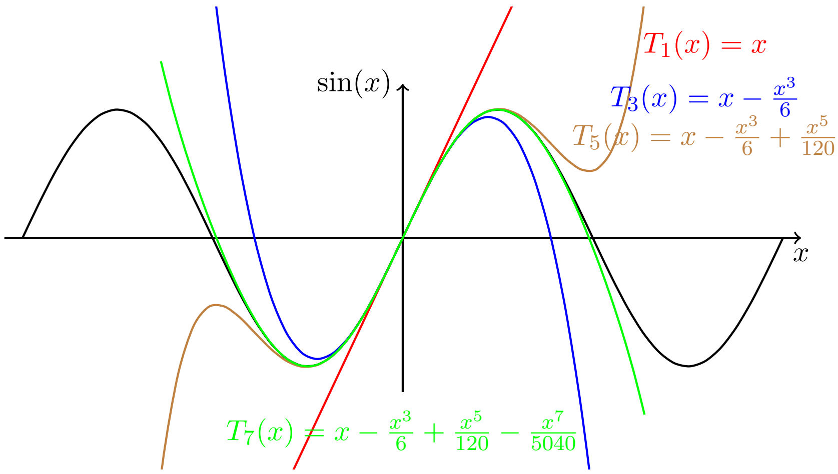
Proto

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Taylorův polynom stupně $n = 2\ell$ je stejný jako Taylorův polynom stupně $n = 2\ell - 1$ a platí

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí $T_{2n} = T_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ a ještě speciálněji třeba $T_{40} = T_{39}$. Ukázka několika Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 je uvedena na obrázku 6.4. △



Obrázek 6.4: Příklady Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 malých stupňů.

6.3 Chyba aproximace

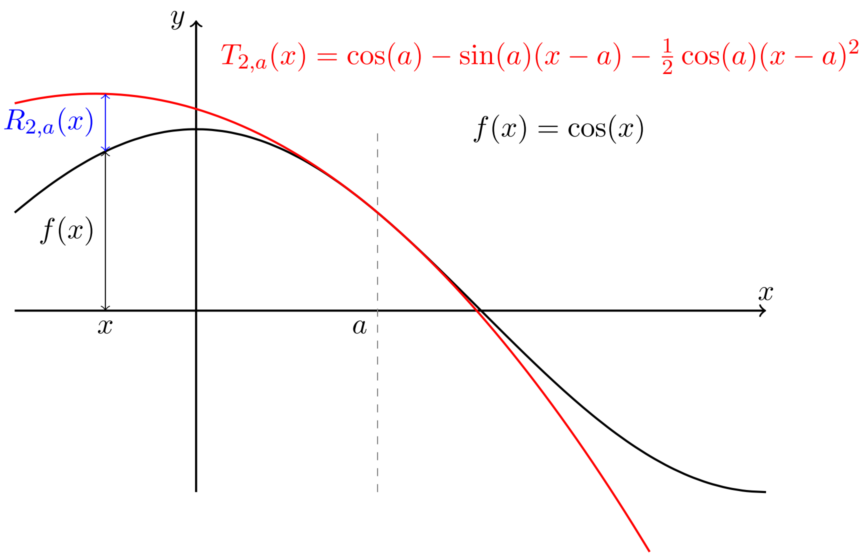
V této podkapitole se budeme zabývat chybou mezi původní funkcí a Taylorovým polynomem. Kdybychom tuto chybu nebyli schopni alespoň odhadnout, pak by aproximace byla nepoužitelná. Definujme si nejprve jasně chybu (zbytek), který zkoumáme.

Definice 6.3: Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n**-tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Poznámka (Značení)**:** V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě $a = 0$ píšeme pro jednoduchost T_n místo $T_{n,0}$. Podobně v případě zbytku $R_n = R_{n,0}$ a Peanova zbytku (zaveden dále) $\omega_n = \omega_{n,0}$. Taylorův polynom pro $a = 0$ se také někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.



Obrázek 6.5: Grafické znázornění Taylorova vzorce, tedy vztahem mezi funkční hodnotou funkce f, Taylorova polynomu $T_{n,a}$ a zbytku $R_{n,a}$.

První informaci o zbytku v Taylorově vzorci nám dává následující věta. Hrubě řečeno, když $x \to a$, pak zbytek v Taylorově vzorci jde k nule rychleji, než poslední člen n-tého Taylorova polynomu.

Věta 6.4: Nechť funkce f má v jistém okolí H_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$ □

Důsledek 6.5: Za stejných předpokladů jako v předchozí větě. Taylorův vzorec lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \omega_{n,a}(x)\cdot(x-a)^n,$$

kde $\lim\limits_{x\to 0} \omega_n(x) = 0$. Výraz $\omega_{n,a}(x)\cdot(x-a)^n$ se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

Důkaz. Stačí položit $\omega_{n,a}(x) := \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$ a použít předchozí věty. □

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Protože $\sin x = x + \omega_{1,0}(x) \cdot x$, kde $\lim\limits_{x\to 0} \omega_{1,0}(x) = 0$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \big(1 + \omega_{1,0}(x)\big) = 1 + 0 = 1. \qquad \triangle$$

Hrubě řečeno, n-tý Taylorův polynom je nejlepší aproximace mezi všemi polynomy stupně n. Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

Věta 6.6 (O nejlepší aproximaci)**:** Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \smallsetminus \{0\}.$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x. Pokud $T_{n-1} \neq T_n$, pak pro jisté okolí H_0 podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \smallsetminus \{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom aproximuje funkci f lépe než předchozí (pokud není shodný s předchozím).

Jak ukazuje následující příklad, mohou existovat i patologické příklady, kdy aproximace pomocí Taylorových polynomů nedává dobře použitelné výsledky.

Příklad: Zkoumejte Taylorovy polynomy funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

v bodě $a = 0$. Pomocí indukce lze dokázat, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(k)}(0) = 0.$$

Pro libovolný n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě 0 proto platí

$$T_n(x) = 0.$$

Každý je tedy nulovým polynomem! Při zvyšování stupně se přesnost aproximace nijak nezlepšuje. △

Nejdůležitější větou této kapitoly je následující Taylorova věta.

Věta 6.7 (Taylorova)**:** Nechť existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ lze pro každé $x \in H_0$ zapsat ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a 0. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Důkaz. Vynecháváme. □

Poznámka: Pro číslo ξ z předchozí věty tedy platí $0 < |\xi| < |x|$.

Tato věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje **odhadovat** chybu mezi původní funkcí a jejím Taylorovým polynomem.

Příklad: Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce e^x třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě $x = \frac{1}{2}$,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v $x = \frac{1}{2}$:

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Podle Taylorovy věty 6.7 platí ($f(x) = e^x$) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

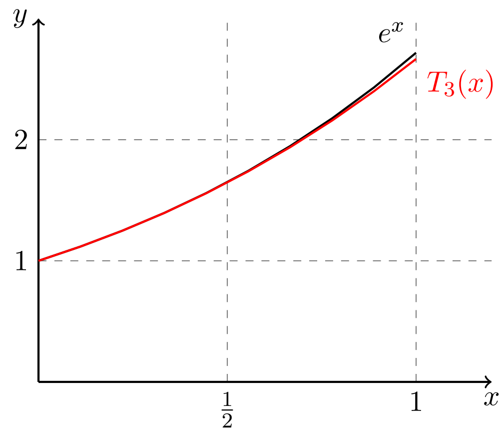
kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

O čísle ξ pouze víme, že leží v intervalu $(0, \frac{1}{2})$. Navíc umíme odhadnout velikost čísla e, platí nerovnost $e < 4$ (zdůvodněte!). Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$

Číslo $\sqrt{e}$ leží v intervalu $(1.6458\bar{3},\ 1.651041\bar{6})$. Vizte ilustrační obrázek 6.6. △



Obrázek 6.6: Graf exponenciály a 3. Taylorova polynomu exponenciály v bodě 0 použitého k přibližnému výpočtu $e^{\frac{1}{2}}$.

6.4 Funkce jako limita Taylorových polynomů

Již jsme spočetli, že pro každé reálné x a přirozené n platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále známe tvar zbytku, lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde $\xi_{n,x}$ leží mezi 0 a x, tudíž $\xi_{n,x} < |x|$. Z monotonie e^x pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad tedy nezávisí na n (v tomto případě)!

Pro dané pevné $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!} |x^n| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti 2.25 zaručuje

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Pro libovolné reálné x tedy platí

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Tento fakt pro nás samozřejmě není překvapením, protože exponenciálu jsme takto definovali! Jak za chvíli uvidíme, tuto vlastnost mají i další elementární funkce.

Definice 6.8: Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

závisející na reálném parametru x, nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Definice 6.9: Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **v bodě** c.

Poznámka: Uvažme pro jednoduchost $c = 0$.

- Je-li například $x = 2$, pak máme číselnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$,
- je-li $x = \frac{1}{3}$, pak máme číselnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému x přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

Věta 6.10: Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|c-x| > R$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x| \cdot L > 1$, tedy $|x| > R$, pak pod podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k x^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_k x^k = 0$). ☐

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{6.1}$$

Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (6.1). Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (6.1) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. **Neříká nic** o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$. Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta 6.11 (Cauchy-Hadamard)**:** Ke každé mocninné řadě tvaru (6.1) existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

Důkaz. Vynecháváme. ☐

Poloměr konvergence ale vždy **nemusí** jít spočítat pomocí limity podílů uvedených ve větě 6.10. Tato limita nemusí existovat.

Příklad: Uvažte mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k)\, x^k.$$

Limita

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\sin(k+1)}{\sin(k)} \right|$$

neexistuje, ale podle srovnávacího kritéria mocninná řada jistě konverguje pro $x \in (-1, 1)$. Skutečně,

$$|\sin(k)\, x^k| \le |x|^k$$

a $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$ konverguje pro $|x| < 1$. △

e^x	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Tabulka 6.1: Některé elementární funkce a jejich Taylorovy řady a příslušnými poloměry konvergence.

Příklad: Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorovy řady v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$. Zadání je tedy v pořádku, tato řada je skutečně Taylorovou řadou příslušné funkce v bodě 0. Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní. Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x. Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

platí pro $x \in (-1, 1)$. Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci. △

Na závěr této podkapitoly uvádíme v tabulce 6.1 Taylorovy řady dalších elementárních funkcí a jejich obory konvergence.

6.5 Další příklady

Tuto kapitolu uzavřeme několika řešenými příklady.

Příklad: Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce sin pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}. Díky periodicitě a tvaru[2] funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Podle Taylorovy věty pro $(2n+2)$-hý Taylorův polynom se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

[2] Stačí umět počítat funkční hodnotu v prvním kvadrantu.

Indexy u symbolu $\xi_{n,x}$ nám připomínají, že tento závisí na x a n.

Protože derivace lichého řádu funkce sin je – až na střídající se znaménko – funkce cos, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

Hodnoty a_n jsou uvedeny v tabulce 6.2.

n	a_n
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Tabulka 6.2: K příkladu aproximace funkce sinus.

Vidíme, že pro $n = 5$ je a_n poprvé menší než 10^{-7}. Tudíž můžeme uzavřít, že se pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ hodnota $\sin(x)$ liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

nejvýše o 10^{-7}. △

Kapesní kalkulátory většinou přímo nepoužívají mocninné rozvoje pro výpočet hodnot trigonometrických funkcí (sin, cos, tan, atd.).

Poznámka (***CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer*)**:** Algoritmus k výpočtu například funkčních hodnot funkce sin rafinovaně využívá

1. součtové vzorce pro trigonometrické funkce,
2. vzorky, tj. hodnoty funkce sin **předem napočtené** (například pomocí Taylorova polynomu) pro jistou množinu úhlů.

První implementace: 1959, navigační počítač bombardéru B-58.

Kapitola č. 7

Primitivní funkce

Primitivní funkce; vlastnosti primitivní funkce; neurčitý integrál; primitivní funkce elementárních funkcí; linearita neurčitého integrálu; integrace per partes; integrace substitucí; integrace jednoduchých racionálních lomených funkcí funkcí; doplnění na čtverec.

7.1 Neurčitý integrál

Nejprve zavedeme pojem primitivní funkce. Jak uvidíme, jedná se v jistém smyslu o inverzní pojem k pojmu derivace funkce. Význam primitivních funkcí rozebereme podrobně v následujících kapitolách.

Definice 7.1: Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Ihned z definice plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy je i spojitá na (a, b). K nahlédnutí tohoto faktu si stačí vzpomenout na větu č. 5.4.

Příklad: Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b). △

Kolik primitivních funkcí k zadané funkci f může existovat? Jak se od sebe případně liší? Na tyto otázky odpovídá následující tvrzení.

Věta 7.2: Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz. Pokud jsou funkce F a G primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto podle věty č. 5.14 konstantní na intervalu (a, b).

Naopak, je-li $G(x) = F(x) + c$, pro libovolné $x \in (a, b)$, pak $G'(x) = F'(x)$. □

Proto je přirozené zavést značení pro množinu všech primitivních funkcí k zadané funkci f.

Definice 7.3: Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka (Terminologie)**:** Najdeme-li k f primitivní funkci F na intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí**, x **integrační proměnnou** a c **integrační konstantou**. Úkolu určit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

říkáme „najít primitivní funkci k f“, nebo „vypočítat integrál z f“, nebo „integrovat f“.

Důvod pro tuto notaci bude odhalen v následujících kapitolách. Zde aspoň poznamenejme, že symbol $\int$ je stylizované *S*.

Poznámka (*Mathematica*)**:** K hledání primitivní funkce pomocí *Mathematica* lze použít příkaz `Integrate[`f`, `x`]`, kde f je integrovaná funkce (výraz) a x je integrační proměnná.

Slibovaný inverzní vztah mezi derivací a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) můžeme vyjádřit následovně:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice č. 7.1 plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a, b), potom opět přímo z definice č. 7.1 plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b). \tag{7.1}$$

Zatím jsme neodpověděli na otázku, zda k zadané funkci f vůbec primitivní funkce existuje. Nemusí tomu tak být vždy. Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce je obsažena v následující větě.

Věta 7.4 (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)**:** Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz. Vynecháváme. □

Protože umíme derivovat celou řadu elementárních funkcí (viz např. tabulku č. 5.1) známe i primitivní funkce k některým elementárním funkcím. Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku č. 7.1 primitivních funkcí.

K výpočtu primitivní funkcí komplikovanějších funkcí potřebujeme využít vlastností neurčitého integrálu, které odvodíme v následujících odstavcích.

Věta 7.5: Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz. Stačí si uvědomit, že derivace součtu funkcí je součet derivací funkcí a že derivace konstantního násobku funkce je ten samý konstantní násobek derivace funkce. □

Znění předchozí věty symbolicky zapisujeme takto,

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$

a mluvíme o linearitě neurčitého integrálu.

vzorec	interval, parametry
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \big(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + C$	$x \in \big(k\pi,\ \pi + k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 7.1: Základní primitivní funkce.

Příklad: Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

Dle předchozí věty ihned dostáváme výsledek

$$\begin{aligned}\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x &= 4\int x^2 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int x^{-2/3} \,\mathrm{d}x = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln\lvert x\rvert + \frac{x^{1/3}}{1/3} = \frac{4}{3}x^3 - \ln\lvert x\rvert + 3x^{1/3} + C,\end{aligned}$$

který platí na libovolném otevřeném intervalu, který je podmnožinou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. △

Příklad: Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Nejprve provedeme jednoduchou algebraickou úpravu integrandu a následně využijeme předchozí větu čímž dostáváme výsledek,

$$\begin{aligned}\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \left(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int 4^x \,\mathrm{d}x + 2\int 6^x \,\mathrm{d}x + \int 9^x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

△

7.2 Integrace per partes

V předchozí kapitole jsme zjistili jak hledat primitivní funkci k součtu dvou funkcí a konstantnímu násobku funkce. Nyní se pokusíme hledat primitivní funkci k součinu dvou funkcí. S výhodou nyní využijeme větu č. 5.5 o derivaci součinu dvou funkcí.

Věta 7.6 (Per partes)**:** Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G. \tag{7.2}$$

Důkaz. Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Podle rovnice (7.1) platí

$$\Big(fG - \int f'G\Big)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg. \qquad \square$$

Poznamenejme, že metoda integrace per partes může být úspěšná pouze pokud budeme schopni dále pracovat s novým integrálem na pravé straně rovnice (7.2), který je stále ve tvaru součinu. Latinský výraz „per partes“ v češtině znamená „po částech“. Důvod k tomuto označení je zřejmý.

K zapamatování formulky (7.2) lze použít následujícího schématu.

$$\int fg = \left|\begin{array}{cc} f & g \\ \downarrow & \downarrow \\ f' & G \end{array}\right| = fG - \int f'G.$$

Příklad: Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Pomocí integrace per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\int x \sin x \,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x = \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Na tomto místě je dobré si uvědomit, že správnost výsledku integrace můžeme vždy snadno ověřit pomocí definice č. 7.1, tedy derivováním:

$$\big(-x\cos x + \sin x + C\big)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$. Nyní je potřeba per partes použít dvakrát. Dostáváme

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{array}\right| = x^2e^x - \int 2xe^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\int xe^x \,\mathrm{d}x = \\ &= \left|\begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array}\right| = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.\end{aligned} \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$. Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C. \qquad \triangle$$

7.3 Věty o substituci v neurčitém integrálu

Metoda integrace per partes byla založena na znalosti derivace součinu dvou funkcí. Ze znalosti derivace složené funkce nyní odvodíme metodu integrace pomocí substituce.

Věta 7.7 (O substituci I)**:** Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) \subset (a, b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big).$$

Důkaz. F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. $\square$

Příklad: Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Potom $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} \mathrm{d}x = -\int \sin y \, \mathrm{d}y = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Čímž je výpočet dokončen. Výsledek platí na libovolném otevřeném podintervalu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\triangle$

Příklad: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

Výpočet provedeme na intervalu $(0,+\infty)$ což je největší interval, na kterém je integrand definován. Pro substituci použijeme $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$, pro jejíž derivaci platí $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tudíž,

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \\ = 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Výsledek platí na $(0,+\infty)$, protože $\operatorname{arctg} y$ je primitivní funkcí k $\frac{1}{1+y^2}$ na $\varphi((0,+\infty)) = (0,+\infty)$. △

Příklad: Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{1}{\cos(x)}\cdot\left(-\sin(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci (č. 7.7), kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1,0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\left(-\cos(x)\right) + C, \quad x\in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$ a

$$\int\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\left(-\cos(x)\right) + C.$$ △

V předchozí větě č. 7.7 byla stará integrační proměnná x s novou integrační proměnnou y svázána předpisem typu $y = \varphi(x)$. V následující větě naopak klademe $x = \varphi(y)$, čili $y = \varphi^{-1}(x)$. Tato varianta substituce bude tedy zřejmě založena na schopnosti derivovat inverzní funkci (viz větu č. 5.7).

Věta 7.8 (O substituci II)**:** Nechť f je definována na intervalu (a,b) a nechť φ je bijekce intervalu (α,β) na (a,b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C \quad\Longrightarrow\quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Důkaz. Pomocí věty o derivaci složené funkce (č. 5.6) a věty derivaci inverzní funkce (č. 5.7) ověříme správnost tvrzení. Platí

$$\Big(G(\varphi^{-1}(x))\Big)' = G'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \\ = f\left(\varphi(\varphi^{-1}(x))\right)\cdot\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = f(x).$$ □

Příklad: Pomocí předchozí věty vypočtěte (již známý) integrál

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := \big(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2} \big).$$

Funkce $\sin$ je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C. \end{aligned}$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Podobně jako v předchozím případě se lze zbavit odmocniny. Nyní je však integrand definován na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li

$$x = \varphi(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

pak

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(t)^2 = 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 &= 1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Protože $\varphi'(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$

Funkce φ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ a je monotónně rostoucí s nenulovou derivací. K dokončení příkladu je nutné nalézt její inverzi. Pokud $x = \varphi(t)$, pak

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Odtud

$$e^t = \frac{1}{2}\left(2x \pm \sqrt{4x^2+4}\right) = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Smysl v našem případě má pouze znaménko plus. Tudíž,

$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Uzavíráme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C. \qquad \triangle$$

Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) z elementárních funkcí. Jako příklad uveďme[1]

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**. Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Příklad: Vypočtěte $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ a výsledek ověřte.

Pomocí substituce $y = x^2$,

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}.$$

△

Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky). Touto problematikou se zde ale nebudeme zabývat v plné obecnosti. Omezíme se na případy kdy polynom v jmenovateli, $q(x)$, je stupně nejvýše dvě.

V následující části textu si tedy rozeberem, jak integrovat

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde p je libovolný polynom a q je polynom stupně **nejvýše** dvě. Základní kroky postupu lze popsat následovně:

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak

   $$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme

   $$\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C.$$

[1] Nejde o nepodstatné funkce. Například primitivní funkce k e^{-x^2} se vyskytuje v praktických aplikacích. V pravděpodobnostních a statistických tabulkách byste ji našli pod jménem `Erf` (*error function*)

3. Pokud má polynom q jeden dvojnásobný kořen, pak

$$\int \frac{bx+c}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{b}{(x-a)} + \frac{ab+c}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| - \frac{ab+c}{x-a} + C.$$

4. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme **bod 2**.

5. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminat je záporný, pak použijeme **doplnění jmenovatele na čtverec**, integrál pak vede na arctg.

Poznámka (Jednoduchý rozklad na parciální zlomky)**:** K úspěšnému provedení kroku 4. je potřeba provést rozklad na parciální zlomky (nejjednodušší verze):

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d}.$$

Konstanty a, b, c, d jsou zadány, neznámé A, B hledáme. Převedeme-li pravou stranu na společný jmenovatel a upravíme čitatele dostaneme

$$\frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d} = \frac{(A+B)x - Ad - Bc}{(x-c)(x-d)}.$$

Neznámé proto řeší soustavu

$$\begin{aligned} a &= A + B, \\ b &= -Ad - Bc, \end{aligned}$$

kterou snadno vyřešíme (v konkrétním příkladě). Často lze u jednoduchých příkladů rozklad i uhodnout. Například

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}.$$

Příklad: Ukázky použití metody na postupně se komplikujících se příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(x-1) + C$, kde jsme použili substituci $y = x - 1$.
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\big((x-1)^2\big)'}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\Big(1+(x-1)^2\Big) + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$, a na druhý integrál použijeme předchozí bod.

$\triangle$

Kapitola č. 8

Riemannův integrál

Maximum a minimum; supremum a infimum; dělení intervalu; dolní součet a horní součet; horní a dolní integrál; Riemannův integrál; integrální součet; postačující podmínka existence Riemannova integrálu; Newtonova formule.

8.1 Supremum a infimum

Připomeňme pojem maxima a minima množiny. Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazýváme

- **maximem** množiny M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$,
- **minimem** množiny M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem ani maximem, neboť $0, 1 \notin M$. Každá konečná množina ovšem má minimum i maximum.

Abychom tento problém odstranili, zavádíme pojem infima a suprema množiny. Čtenáři nabízíme grafickou ilustraci definice infima množina na obrázku č. 8.1.

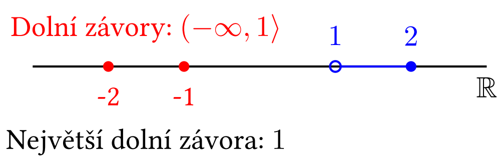
Definice 8.1: Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$.
   (α je největší dolní závora A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Definice 8.2: Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$.
   (α je nejmenší horní závora A)



Obrázek 8.1: Ilustrace ke konstrukci infima množiny, zde $A = (1, 2\rangle$. Množina dolních závor je $(-\infty, 1$, čili největší dolní závorou je 1.

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta 8.3: Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Důkaz. Vynecháváme, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel. $\square$

Příklad: Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \qquad \sup J = 1, \qquad \min J \text{ neexistuje}, \qquad \inf J = -2. \qquad \triangle$$

V dalším textu nás budou zajímat hodnoty funkce nabývané na různých množinách. Zavádíme proto následující značení. Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\begin{aligned} \inf_M f &= \inf_{x\in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \sup_M f &= \sup_{x\in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

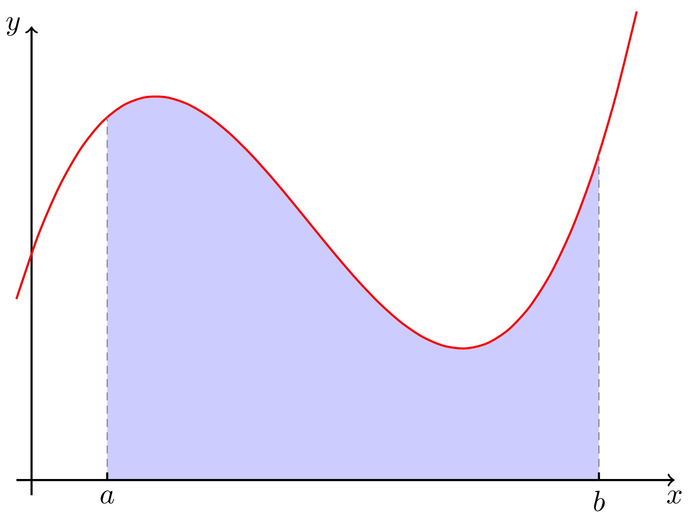
Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\begin{aligned} \max_M f &= \max_{x\in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \min_M f &= \min_{x\in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Připomeňme, že tato $\min$ a $\max$ existují díky spojitosti f a uzavřenosti M.

8.2 Konstrukce Riemannova integrálu

Nejjednodušší geometrickou motivací určitého (Riemannova[1]) integrálu je výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou nezávisle proměnné. Na obrázku č. 8.2 je tato plocha znázorněna světle modrou barvou.



Obrázek 8.2: Plocha pod grafem funkce.

[1] Bernhard Riemann, německý matematik, 1826 – 1866.

Celá konstrukce Riemannova integrálu vychází ze znalosti obsahu obdélníka. Danou plochu pod grafem funkce budeme postupně aproximovat plochou sestavenou z mnoha obdélníků. Ukazuje se, že pro spojitou funkci tento limitní proces dává dobrý výsledek. Nejprve definujme základní pojmy.

Definice 8.4: Buď dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům x_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b\rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme **částečný interval** intervalu $\langle a, b\rangle$ při dělení σ. Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ.

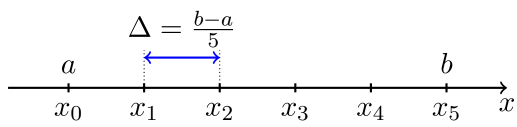
Příklad (Ekvidistantní dělení)**:** Pro interval $\langle a, b\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta := \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a,\ a+\Delta,\ a+2\Delta, \dots,\ a+(n-1)\Delta,\ a+n\Delta = b\}.$$

V případě $n = 5$ si lze ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ představit jako na následujícím obrázku č. 8.3. △



Obrázek 8.3: Příklad ekvidistantního dělení intervalu.

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J. Označme

$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f.$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Potom součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma, f)\Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\sigma, f)\Delta_i$$

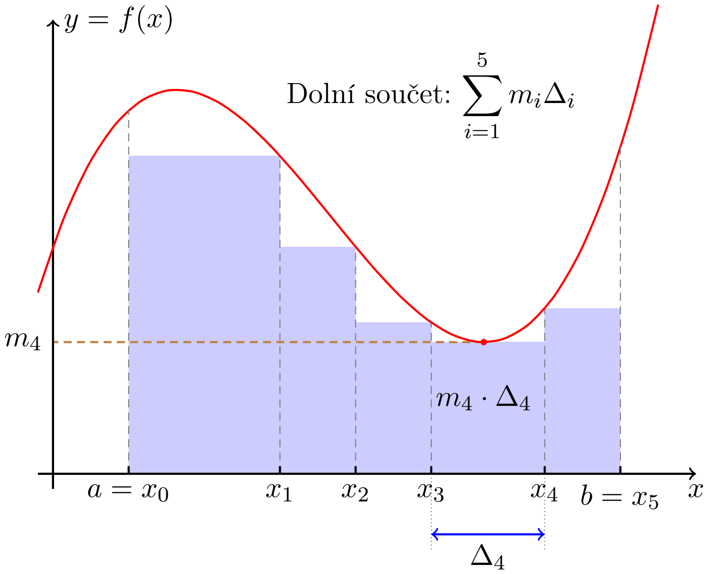
nazýváme **horním** a **dolním součtem funkce** f při dělení σ.

Dolní, resp. horní, součty představují obsah plochy tvořené obdélníky pod, resp. nad, grafem funkce s podstavami tvořenými částečnými dělícími intervaly. Následující obrázky č. 8.4 a 8.5 jsou ilustrativní.

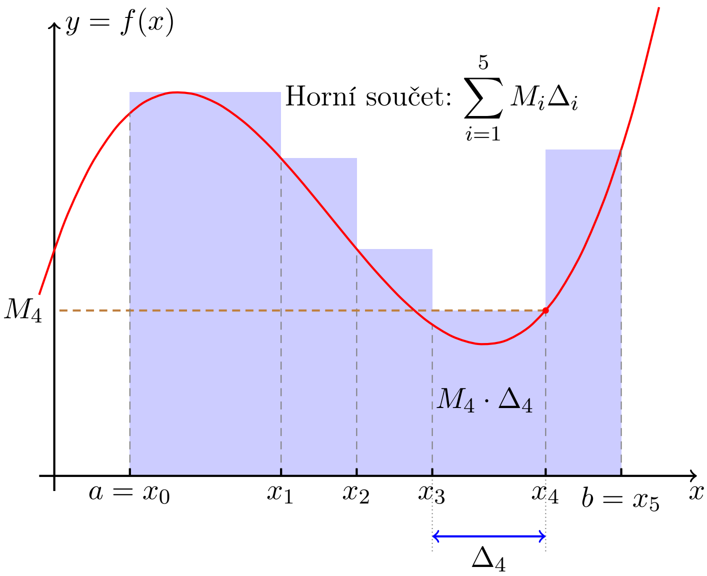
Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b\rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.



Obrázek 8.4: Dolní součet funkce f při dělení σ.



Obrázek 8.5: Horní součet funkce f při dělení σ.

Definice 8.5: Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta 8.6 (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu)**:** Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pokud je navíc (σ_n) normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Definice 8.7: Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma, f) \leq \mathcal{J}(\sigma, f) \leq S(\sigma, f).$$

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f), \tag{8.1}$$

kde (σ_n) je libovolná normální posloupnost dělení.

Příklad: Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro libovolné dělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$s(\sigma, f) = S(\sigma, f) = \mathcal{J}(\sigma, f) = c(b - a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost (σ_n) dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f) = c(b - a).$$

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je pak

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

Viz obrázek č. 8.6. △

Příklad: Pomocí definice vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních dělení intervalu J.

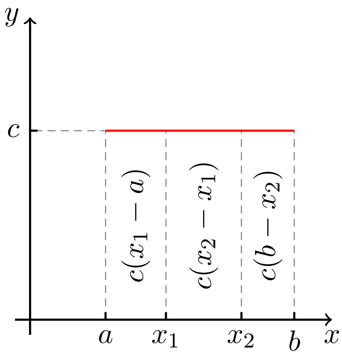
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

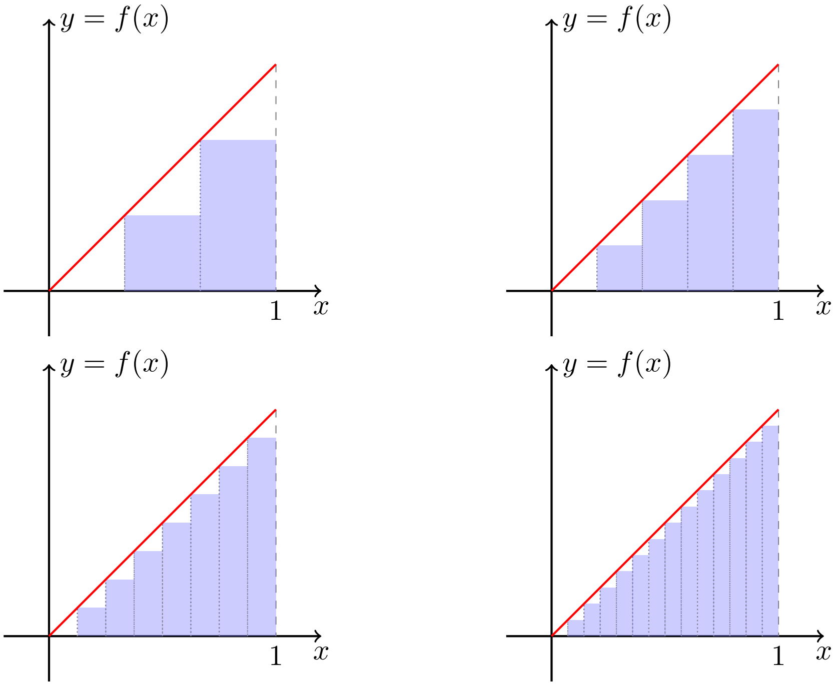
$$s(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$ △



Obrázek 8.6: Riemannův integrál z konstantní funkce.



Obrázek 8.7: K výpočtu Riemannova integrálu funkce $f(x) = x$.

Poznámka (*Mathematica*)**:** Určitý integrál lze v *Mathematica* počítat pomocí příkazu `Integrate[`f`,{`x`,`a`,`b`}]`, kde f je integrovaná funkce (výraz), x integrační proměnná a a dolní a b horní mez.

Poznámka (Numerický výpočet integrálu)**:** V následující podkapitole si ukážeme jak v některých případech lze počítat Riemannův integrál symbolicky. Na tomto místě je ale vhodné poznamenat, že konstrukce (definice) uvedená v této kapitole přímo nabádá k numerickému výpočtu pomocí počítače. Nejvhodnější k tomuto účelu použít integrálních součtů, vizte rovnici (8.1). Výhodou oproti horním a dolním součtům je, že není potřeba složitě hledat infima ani suprema dané funkce na dělících intervalech.

Na tomto místě zmiňme aspoň jeden sofistikovanější způsob známý jako **Simpsonovo pravidlo**. Jeho myšlenka opět spočívá v konstrukci dělení $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. V předchozích odstavcích jsme nad dělícími intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nahradili původní funkci f konstantní funkcí (supremem, infimem nebo libovolnou hodnotou funkce f). Nyní nahradíme funkci f nad intervalem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ kvadratickou interpolací.

Hledáme kvadratickou funkci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ splňující

$$\begin{aligned} \alpha x_{i-1}^2 + \beta x_{i-1} + \gamma &= f(x_{i-1}), \\ \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma &= f(x_i), \\ \alpha\Big(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Big)^2 + \beta\frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \gamma &= f\Big(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Big). \end{aligned}$$

Tyto tři lineární rovnice pro tři neznámé α, β, γ lze vyřešit (explicitní vzorečky pro ně lze nalézt v `bi-zma-m-integrace.nb` notebooku na EDUXových stránkách BI-ZMA). Příspěvek k integrálu na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pak nahradíme skutečným integrálem z této kvadratické funkce (vizte Newtonovu formuli 8.12 dále),

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})\bigg(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big)\bigg).$$

Tudíž podle Simpsonova pravidla je přibližnou hodnotou integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

hodnota součtu

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})\bigg(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big)\bigg),$$

kde $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

8.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na spojité omezené funkce, pro něž Riemannův integrál existuje. Následující vlastnosti lze odvodit přímo z definice Riemannova integrálu (resp. pomocí integrálních součtů a normálních posloupností dělení). První dvě věty velmi zjednodušují praktické výpočty.

Věta 8.8 (Aditivita integrálu)**:** Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.9 (Multiplikativita integrálu)**:** Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předchozí dvě věty často vyjadřujeme konstatováním, že Riemannův (určitý) integrál je lineární. Riemannův integrál je aditivní i vůči mezím, platí totiž:

Věta 8.10 (Aditivita integrálu v mezích)**:** Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Konečně z nerovností mezi funkcemi lze usuzovat na nerovnost mezi jejich určitými integrály. Tuto vlastnost lze často využít při odhadování integrálů (např. při výpočtu rychlosti růstu, k této problematice se dostaneme později).

Věta 8.11 (Nerovnosti mezi integrály)**:** Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta 8.12 (Newtonova formule)**:** Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Důkaz. Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu (věta č. 5.12) o přírůstku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i, \end{aligned}$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma, f).$$

Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení (σ_n) pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Příklad: Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k e^x je funkce e^x. Pak

$$\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = \Big[e^x\Big]_a^b = e^b - e^a. \qquad \triangle$$

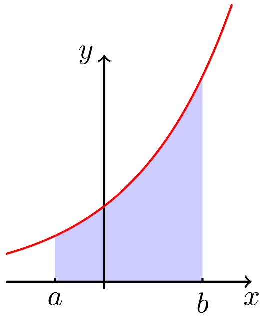
Příklad: Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x.$$

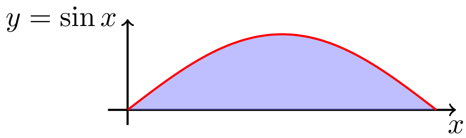
Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce sin je tedy 2 (v daných jednotkách plochy). $\triangle$



Obrázek 8.8: Plocha pod grafem exponenciální funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 8.9: Plocha pod grafem funkce sin na intervalu $(0, \pi)$.

8.4 Per partes a substituce pro určitý integrál

Díky Newtonově formuli (věta č. 8.12) můžeme nyní relativně snadno přeformulovat metodu integrace pomocí per partes a substituce i pro určitý integrál.

Věta 8.13: Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce fG je primitivní funkcí k funkci $f'G + fg$ na intervalu (a, b) a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Předpoklady spojitosti na intervalu $\langle a, b\rangle$ zaručují existenci integrálů $\int_a^b f'G$ a $\int_a^b fg$. Požijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fG)'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)G(x)\right]_a^b. \qquad \square$$

Příklad: Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Zavádíme následující značení

- $\displaystyle\int_a^a f := 0$,
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta 8.14 (O substituci)**:** Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$.

Potom

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Podobně lze formulovat i druhou větu o substituci pro určitý integrál.

Příklad: Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = -\int_{3/2}^{1} \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \Big[\ln |y| \Big]_1^{3/2} = \ln \frac{3}{2}. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^8} \, \mathrm{d}x.$$

Pomocí substituce $y = x^4$, $\mathrm{d}y = 4x^3 \mathrm{d}x$, ihned dostáváme

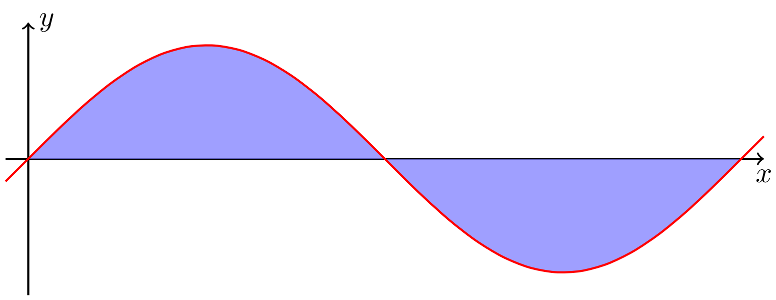
$$\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^8} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \Big[\operatorname{arctg} y \Big]_0^1 = \frac{\pi}{16}. \qquad \triangle$$

8.5 Poznámky

V této sekci nejprve zopakujeme geometrickou interpretaci určitého (Riemannova integrálu) a poté se budeme zabývat jeho různými jednoduchými zobecněními.

Poznámka: Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \mathrm{d}x = -2.$$



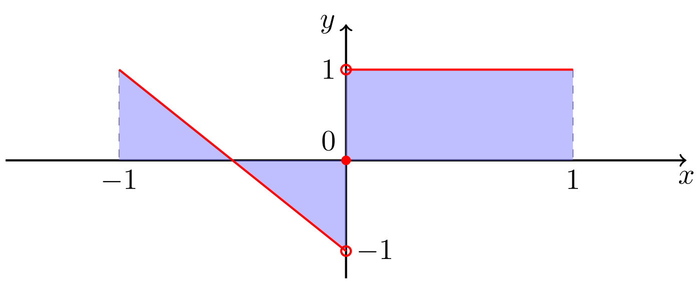
Poznámka: Pokud je funkce f definována na intervalu $\langle a, b \rangle$, avšak není na něm spojitá, stále může mít Riemannův integrál. Nejjednodušším případem je situace s jedním bodem skokové nespojitosti:

- existuje $c \in (a, b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a, c)$ a $(c, b \rangle$,
- existují konečné jednostranné limity v bodě c.

Potom platí
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$
Integrály na pravé straně rovnosti jsou již ze spojitých funkcí na uzavřených intervalech. Podobně lze postupovat má-li příslušná funkce konečný počet bodů nespojitostí tohoto typu (s konečnými jednostrannými limitami).

Příklad: Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Funkce f není spojitá v bodě 0:
$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -1.$$
Pro podrobnější představu vizte obrázek č. 8.10. Takže
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-2x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = -\Big[x^2+x\Big]_{-1}^{0} + 1 = 1. \qquad \triangle$$



Obrázek 8.10: Graf funkce $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Riemannův integrál jsme konstruovali pro funkce omezené na omezených intervalech. Často je však potřeba integrovat funkce na neomezených množinách případně integrovat neomezené funkce. Zavádíme proto pojem zobecněného Riemannova integrálu. V následujícím textu nastíníme způsob jeho konstrukce.

Definice 8.15: Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemanovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita
$$\lim_{c\to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$
pak její hodnotu značíme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Poznámka: Pokud $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.

Poznámka: Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval $(a, b\rangle$.

Definice zobecněného Riemannova integrálu je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

Příklad:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1}\right) = 1$$

△

Příklad:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0_+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

△

Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojité funkce.

Definice 8.16: Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existuje a značíme ji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem f na** $\mathbb{R}$.

Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu jakým meze „posíláme" do nekonečna.

Příklad: Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrand je zjevně kladnou spojitou funkcí. Dále platí

$$\begin{aligned}\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_{-c}^{c} = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(-c) \\ &= \lim_{c\to+\infty} 2\operatorname{arctg}(c) = \pi.\end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ má tedy absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$ a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$$

△

Při integraci lze často využít symetrie integrované funkce. Následující věta mluví o integraci sudých či lichých intervalů na symetrických intervalech a o integraci periodických funkcí.

Věta 8.17: Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. 1. Pomocí substituce $y = -x$ dostáváme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y.$$

2. Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

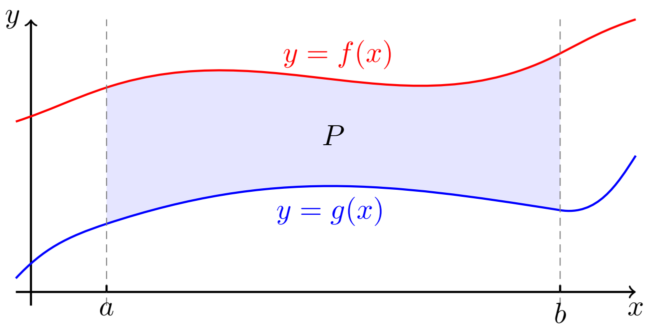
3. Pomocí substituce $y = x + T$ a periodicity f snadno nahlédneme, že
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Příklad: Vypočítejte integrály
$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} xe^{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$$

Postupně vypočteme všechny integrály a použijeme předchozí větu.
$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x)\mathrm{d}x = 3\cdot 2\int_{0}^{2} x^2\mathrm{d}x = 3\cdot 2\cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 16.$$

Pro druhý integrál ihned můžeme psát
$$\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto
$$\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 4. \qquad \triangle$$



Obrázek 8.11: Obsah plochy ohraničené dvěma grafy funkcí.

8.6 Výpočet obsahů plošných útvarů

Z geometrické interpretace Riemannova integrálu ihned plyne následující tvrzení umožňující počítat obsahy různých zakřivených rovinných útvarů. Pro ilustraci uvádíme i obrázek č. 8.11.

Věta 8.18: Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

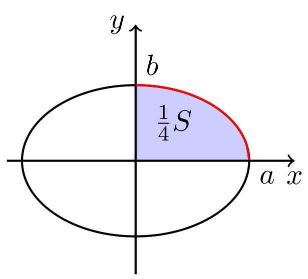
Příklad: Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Rovnice elipsy je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vzhledem k osovým symetriím stačí spočítat čtvrtinu obsahu (vizte obrázek č. 8.12). Vrchní oblouk elipsy v patřící do prvního kvadrantu je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a\rangle$.

Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ab.$$

Pro celkovou plochu tak dostáváme $S = \pi ab$. △



Obrázek 8.12: K výpočtu plošného obsahu elipsy.

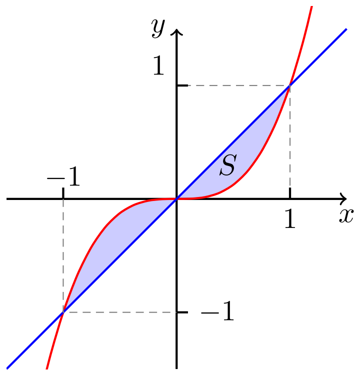
Příklad: Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$. Tato plocha je vyobrazena na obrázku č. 8.13.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, -1),\ (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}. \qquad \triangle$$



Obrázek 8.13: Plocha ohraničená křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Příklad: Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

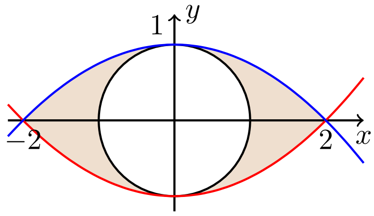
která je vyobrazena na obrázku č. 8.14.

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

$$\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi. \qquad \triangle$$



Obrázek 8.14: Sauronovo oko.

8.7 Křivky

V této podkapitole se budeme zabývat křivkou a její délkou. Konkrétně se budeme zajímat křivkou v rovině, intuitivní představu křivky formalizuje následující definice.

Definice 8.19: Buďte f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = \big(f(t), g(t)\big), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

nazýváme křivkou v $\mathbb{R}^2$.

Poznámka: Připomeňme, že kulaté závorky v předchozí definici představují uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v $\mathbb{R}^2$). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b\rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině $\mathbb{R}^2$.

Spojitost složek f a g pak přesně vyjadřuje požadavek, aby křivka byla „nakreslitelná jedním tahem“. Bez požadavku spojitosti by výsledné množina bodů v rovině vůbec nemusela připomínat to, co normálně nazýváme křivkou.

Příklad: Jako příklad křivky uvažme parametrizaci kružnice. Za interval volíme $\langle a, b\rangle = \langle 0, 2\pi\rangle$ a klademe $F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$. Při této volbě kružnici obíháme proti směru hodinových ručiček. △

Známým příkladem křivek jsou Bézierovy křivky.

Definice 8.20 (Bernsteinův polynom)**:** Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a celočíselné i splňující $0 \leq i \leq n$ definujeme Bernesteinův polynom $B_{i,n}$ předpisem

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definice 8.21 (Bézierova křivka)**:** Pro $n+1$ kontrolních bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ definujeme křivku C předpisem

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad t \in \langle 0, 1\rangle,$$

a nazýváme ji Bézierovou křivkou s kontrolními body $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

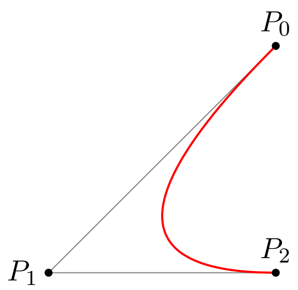
Uvažme například tři body

$$P_0 = (1, 2),\ P_1 = (-2, -1),\ P_2 = (1, -1).$$

Potom

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0(1-t)^2 + P_1 \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2 = \\ &= \big(1 - 6t + 6t^2,\ 2 - 6t + 3t^2\big). \end{aligned}$$

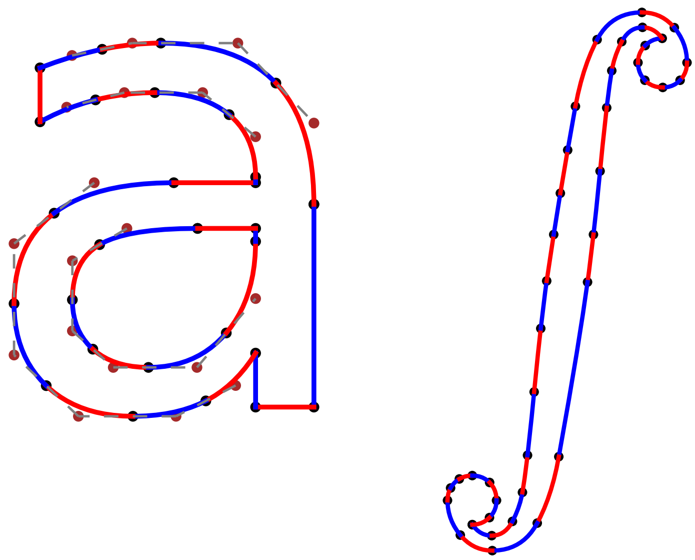
kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. Tato křivka je znázorněna na obrázku č. 8.15.



Obrázek 8.15: Ukázka kvadratické Bézierovy křivky.

V následujícím výpisu uvádíme hrubý extrakt dat z `DejaVuSans.ttf`, pro písmeno „a“, vykreslený výsledek pak lze nalézt na obrázku č. 8.16.

```
<TTGlyph name="a" xMin="123" yMin="-29" xMax="1069" yMax="1147"/>
  <contour>
    <pt x="702" y="563" on="1"/>
```



Obrázek 8.16: Písmeno „a“ a znak integrálu, jejich konstrukce pomocí Bézierových křivek.

```
    <pt x="479" y="563" on="0"/>
    <pt x="307" y="461" on="0"/>
    <pt x="307" y="338" on="1"/>
    ...
    <pt x="885" y="563" on="1"/>
  </contour>
  <contour>
    <pt x="1069" y="639" on="1"/>
    <pt x="1069" y="0" on="1"/>
    <pt x="885" y="0" on="1"/>
    ...
    <pt x="1069" y="895" on="0"/>
  </contour>
</TTGlyph>
```

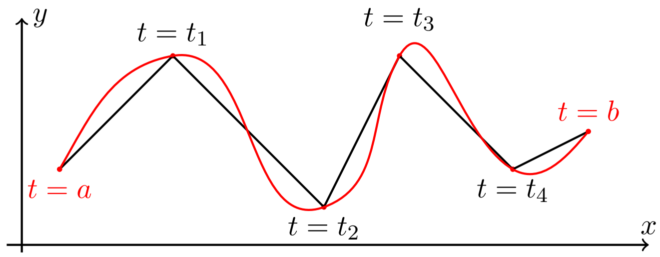
Obraťme se nyní k další otázce. Jak vypočíst délku křivky? Umíme snadno počítat délku úseček spojující dva body (pomocí Euklidovské vzdálenosti dvou bodů v rovině). Proto se nabízí možnost aproximovat křivku pomocí lomené čáry (viz obrázek č. 8.17), jejíž délku snadno vypočteme. Postupný zjemňováním lomené čáry se pak limitně budeme blížit k délce původní křivky (pokud to půjde).

Definice 8.22: Pro křivku F v $\mathbb{R}^2$ a dělení $\sigma = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ položme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)^2 + \big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při dělení σ.

Věta 8.23: Je-li F křivka v $\mathbb{R}^2$, $F(t) = \big(f(t),\, g(t)\big)$ a funkce f a g jsou spojitě diferencovatelné na $\langle a, b\rangle$, pak pro libovolnou normální posloupnost dělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje konečná



Obrázek 8.17: Aproximace křivky pomocí lomené čáry.

limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \ell(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Číslo L nazýváme **délkou křivky** F.

Důkaz — náčrtek. Všimněme si, že $\ell(\sigma)$ lze upravit následovně:

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce (viz větu č. 5.12) postupně na funkce f a g na intervalech $\langle t_i, t_{i-1}\rangle$, pak

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\alpha_i)^2 + g'(\beta_i)^2} \cdot \Delta_i,$$

kde $\alpha_i, \beta_i \in \langle t_i, t_{i-1}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Kdyby $\alpha_i = \beta_i$, pak by se jednalo o integrální součet funkce $f(x) = \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2}$ při dělení σ. Pro normální posloupnost dělení bychom pak v limitě dostali integrál z dané funkce.

Složitějšími manipulacemi lze ukázat, že při různých α_i a β_i se $\ell(\sigma)$ málo liší od integrálního součtu. $\square$

Poznámka (Délka grafu funkce)**:** Graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze chápat jako křivku

$$F(x) = (x,\ f(x)), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Je-li f diferencovatelná, pak pro **délku grafu funkce** f platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

Příklad: Vypočtěte délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Jedná se o délku grafu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Takže pomocí per partes odvodíme

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\mathrm{d}x = \left[x\sqrt{1 + 4x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\mathrm{d}x = \\ &= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Po vyjádření L a substituci dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right),$$

kde jsme dále použili již vypočtený neurčitý integrál

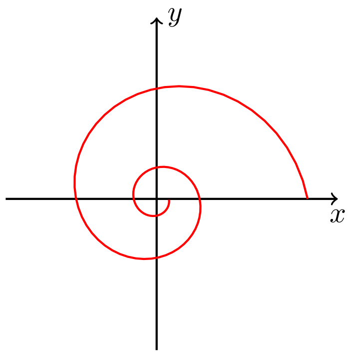
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte délku křivky

$$F(t) = \left(e^{-t}\cos(t),\, e^{-t}\sin(t)\right), \quad t \in \langle 0, 4\pi\rangle.$$

Podle vzorce platí

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{4\pi} \left[\left(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t)\right)^2 + \left(-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{-2t}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{4\pi} e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{4\pi} = \sqrt{2}(1-e^{-4\pi}). \qquad \triangle \end{aligned}$$



Obrázek 8.18: Spirála z předchozího příkladu.

Bézierovy křivky

Uvažme $n \in \mathbb{N}_0$ a libovolné $i = 0, 1, \ldots, n$. Pak definujeme **Bernsteinovy polynomy** předpisem

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \tag{8.2}$$

Tyto polynomy oplývají několika zajímavými vlastnostmi. Všimněme si, že pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ jsou jejich hodnoty nezáporné, tedy $B_{i,n}(t) \geq 0$. Dále součet přes druhý index platí

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} = (t+1-t)^n = 1. \tag{8.3}$$

Skutečně, ve výpočtu jsme nepoužili nic jiného než Binomickou větu. Konečně, pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \qquad B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{8.4}$$

Díky této rovnosti a nezápornosti Bernsteinových polynomů (na intervalu $\langle 0,1\rangle$) také ihned dostáváme horní odhad $B_{i,n}(t) \leq 1$.

Buď zadáno $n+1$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto body jsou často nazývány kontrolními body. Definujme křivku $C : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t).$$

Křivku tohoto typu nazýváme Bézierovou křivkou. Všimněte si, že díky (8.4) platí

$$C(0) = P_0 \quad \text{a} \quad C(1) = P_n.$$

Křivka C tedy začíná v P_0 a končí v P_n.

Rozeberme nejpoužívanější případy Bézierových křivek pro nízké n. Pokud $n = 1$, pak C není nic jiného než přímka spojující body P_0 a P_1. Skutečně,

$$C(t) = \binom{1}{0}(1-t)P_0 + \binom{1}{1}tP_1 = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in \langle 0,1\rangle.$$

Pro $n = 2$ dostáváme tzv. **kvadratickou Bézierovu křivku**,

$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in \langle 0,1\rangle.$$

Pro $n = 3$ dstáváme tzv. **kubickou Bézierovu křivku**,

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in \langle 0,1\rangle.$$

8.8 Celková změna a okamžitá změna

Uvažme funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a,b\rangle$. Derivaci $f'(t), t \in \langle a,b\rangle$, interpretujeme jako **okamžitou změnu** f v čase t. **Celková změna** f mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ je dána

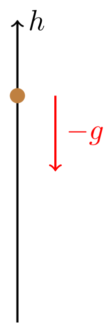
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t.$$

Příklad: Označuje-li $x(t)$ polohu bodu pohybujícího se po přímce v čase $t \in \mathbb{R}$, pak $x'(t)$ představuje jeho okamžitou rychlost v čase t a změna polohy mezi časy 0 a 1 je

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t)\mathrm{d}t.$$

Okamžitá změna rychlosti, $x''(t)$, se nazývá zrychlení. △

Příklad: Z mostu nad řekou upustíme kámen a za 5.6 sekundy uslyšíme jak dopadne do vody. Jaká je výška mostu?



Označme vertikální polohu kamene v čase t jako $h(t)$, hladině odpovídá $h = 0$. Při volném pádu je kámen urychlován pouze tíhovou silou, tedy

$$h''(t) = -g$$

Počáteční polohou je neznámá výška mostu $h(0) = H > 0$ a počáteční rychlostí je $h'(0) = 0$. Rychlost v okamžiku t je tedy

$$h'(t) = h'(0) + \int_0^t h''(s)\mathrm{d}s = 0 + \big[-gs\big]_0^t = -gt.$$

Poloha kamene v čase t je pak

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)\mathrm{d}s = H - g\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_0^t = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Mezi okamžikem dopadu a okamžikem kdy dopad uslyšíme uplyne čas $\frac{H}{v_z}$, kde $v_z \approx 343.2m/s$ je rychlost zvuku. Dopadl-li kámen v čase T, pak $h(T) = 0$, tedy $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Celkem

$$T + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad H + v_z\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H} - 5.6 \cdot v_z = 0$$

a proto $H = 133.2m$. △

Příklad: Nechť v nádobě je 1 litr vody v okamžiku $t = 0$ a je poté napouštěna rychlostí $3t^2 - 2t + 3$ litrů vody za minutu. Voda z nádoby vytéká trhlinou rychlostí 2 litry za minutu. Kolik je v nádobě vody po třech minutách?

Označme objem vody v nádobě v čase t symbolem $V(t)$. Podle zadání je $V(0) = 1$ litr. Změna množství vody je

$$V'(t) = 3t^2 - 2t + 3 - 2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Takže množství vody v nádobě po třech minutách je

$$\begin{aligned} V(3) &= V(0) + \int_0^3 (3t^2 - 2t + 1)\mathrm{d}t = 1 + \Big[t^3 - t^2 + t\Big]_0^3 = \\ &= 1 + 27 - 9 + 3 = 22\,\text{litrů}. \end{aligned}$$

△

Kapitola č. 9

Rychlost růstu posloupností

Rychlost růstu posloupností; odhady částečných součtů posloupností pomocí integrálů; integrální kritérium konvergence řad.

9.1 Odhadování rychlosti růstu součtů

Věta 9.1: Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

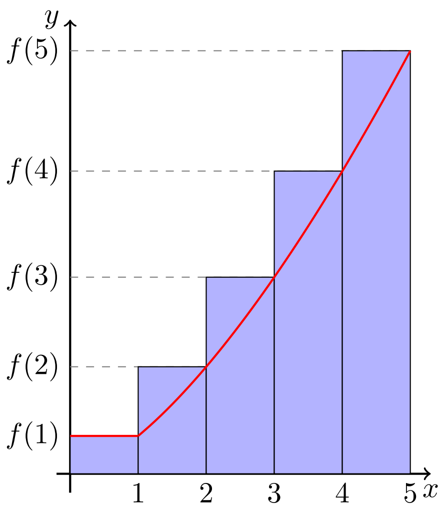
1. Je-li f klesající, pak
$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f rostoucí, pak
$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

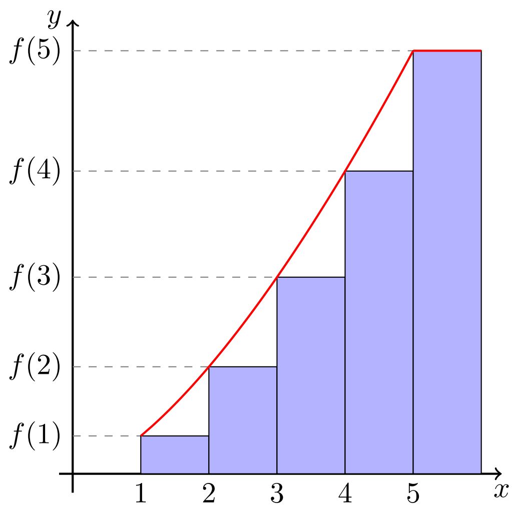
Důkaz pro f klesající. Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\ k+1\rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost
$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud
$$f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$ □





Příklad: Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali explicitně) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \;\leq\; n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji, z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1.$$

△

Příklad: Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x) \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x) \, \mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x\ln(x) - x + C$, tudíž

$$n\ln(n) - n + 1 \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \;\leq\; \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \;\leq\; n! \;\leq\; en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△

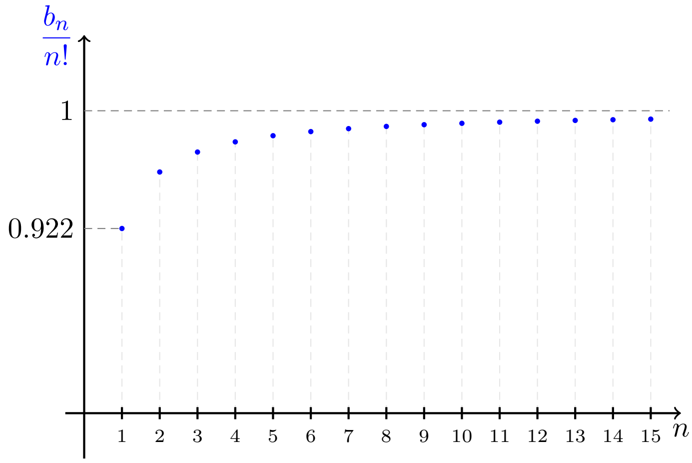
Poznámka: Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost (b_n) takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti (b_n) vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Poměr tohoto b_n ku $n!$ je vynesen na obrázku 9.1.



Obrázek 9.1: K Stirlingově formuli.

Příklad: Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty)$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;\leq\; 1 + \ln(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n), \qquad \text{nebo} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathcal{O}(n).$$

Opět tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \;\leq\; 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu. Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova-Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0.577218\ldots$. △

Věta 9.2 (Integrální kritérium): Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy taková, že existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1}\mathrm{d}x = \ln n$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = +\infty, \quad \alpha \geq -1. \qquad \triangle$$

Kapitola č. 10

Složitost algoritmů

Složitost algoritmů; bublinkové třídění; Quick sort.

10.1 Uspořádání

Definice 10.1: Relaci $\mathcal{R}$ na množině M splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,
3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

nazýváme **uspořádáním** na množině $\mathcal{R}$.

Relaci $\mathcal{R}$, jež je uspořádáním, většinou značíme symbolem $\leq$.

Příklad: Je-li M množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „x je menší nebo rovno y“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$. $\triangle$

Toto uspořádání je tzv. **úplné**. Pro každé $x, y \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ nebo $y\mathcal{R}x$.

Příklad: Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \dots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když m dělí n. Tato relace $\mathcal{R}$ na M je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že n dělí n, tedy $n\mathcal{R}n$.
2. (antisimetrie): Uvažme $n, m \in M$ tak, že n dělí m a m dělí n, pak existují $k, \ell \in M$ splňující

$$m = k \cdot n \quad \text{a} \quad n = \ell \cdot m.$$

   Tudíž $m = (k\ell) \cdot m$, což může nastat pouze v případě $k = \ell = 1$. Proto $m = n$.

3. (tranzitivita): Podobně, pokud n dělí m a m dělí k, pak n dělí k. $\triangle$

10.2 Složitost jednoduchých třídících algoritmů

- **Vstup**: množina $\{x_1, \dots, x_n\}$ a úplné uspořádání $\leq$ mezi jejími prvky. Velikostí vstupu rozumíme jednoduše počet prvků vstupu.
- **Výstup**: uspořádaná n-tice $(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$, kde $(k_1, \dots, k_n)$ je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ a $x_{k_1} \leq \dots \leq x_{k_n}$.
- **Elementární operace**: porovnání dvou prvků.

Bublinkový algoritmus (*Bubble sort*)

Pro připomenutí uvádíme kompletní algoritmus, zřejmě čtenáři známý z předmětu BI-PA1.

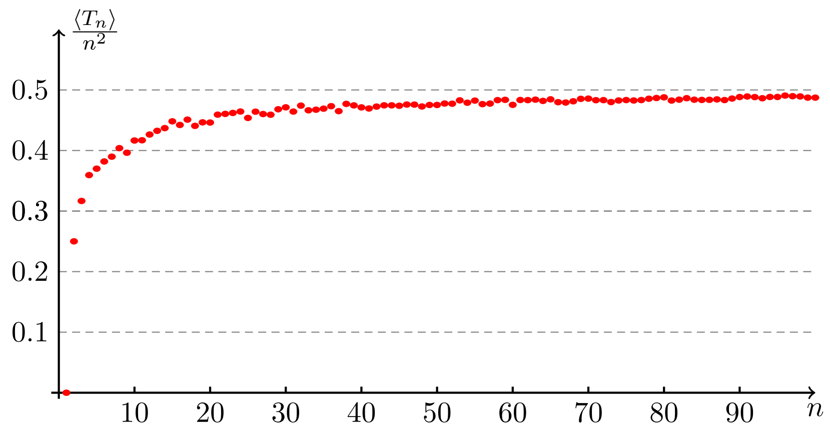
```
procedure bubbleSort(A : array of length n)
  for k in n-1 to 1 do
    sorted = true
    for i in 1 to k do
      if A[i] > A[i+1] then
        swap( A[i], A[i+1] )
        sorted = false
      end if
    end for
    if sorted then return A
  end for
  return A
end procedure
```

Celkový počet porovnání může být nejhůře (pokud je na vstupu seznam v přesně opačném pořadí)

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Pokud je na vstupu již setříděný seznam, pak algoritmus provede $(n-1)$ porovnání (nejlepší varianta). Označíme-li počet porovnání při konkrétním vstupu o velikosti n jako T_n, můžeme tedy shrnout, že pro složitost Bubble sort platí

$$T_n=\mathcal{O}(n^2).$$



Obrázek 10.1: Pro každé $n\in\{1,2,\ldots,100\}$ jsme 20-krát setřídili náhodně permutovanou množinu $\{1,2,\ldots,n\}$ a vypočetli tak střední hodnotu $\langle T_n\rangle$. Na grafu je pak vynesen poměr $\frac{\langle T_n\rangle}{n^2}$.

Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1,\,x_2,\,\ldots,x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché. Označme nyní T_n **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky n pomocí algoritmu *Quick sort*.

Pokud je pivot r-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} T_n = \sum_{r=1}^{n} (n-1) + \sum_{r=1}^{n} (T_{r-1} + T_{n-r}) \quad \Longrightarrow \quad nT_n = n(n-1) + 2\sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

Poslední rovnost vyjádřeme pro k a pro $k-1$ a oba vztahy odečtěme (zbavíme se tím součtu vpravo):

$$\begin{aligned} kT_k &= k(k-1) + 2\sum_{r=1}^{k-1} T_r, \\ (k-1)T_{k-1} &= (k-1)(k-2) + 2\sum_{r=1}^{k-2} T_r, \\ \text{odečtením: } kT_k - (k-1)T_{k-1} &= k(k-1) - (k-1)(k-2) + 2T_{k-1}. \end{aligned}$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k - (k+1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n+1} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = 2\big(1 + \ln(n)\big). \end{aligned}$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}\big(n \ln(n)\big).$$

Odpovědi na některé otázky

1.1 Přirozená čísla i celá čísla lze sčítat a násobit, jsou splněny asociativní, distributivní i komutativní zákony, ale v přirozených číslech neexistuje 0 (neutrální prvek vůči sčítání) a v celých číslech k některým nenulovým prvkům neexistují inverze vůči násobení (např. k 3). Tyto množiny spolu s uvedenými operacemi proto tělesa netvoří.

1.2 Připomeňme definici ostrého uspořádání: pro dvě $a, b \in \mathbb{Q}$ platí $a < b$ právě když $0 < b - a$.
Máme-li $a, b, c \in \mathbb{Q}$ a platí $a < b$ pak podmínka $a + c < b + c$ je ekvivalentní podmínce $(b + c) - (a + c) > 0$. S využitím distributivního, asociativního a komutativního zákona a předpokladu $a < b$ dostáváme

$$(b + c) - (a + c) = (b + c) + (-a - c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0.$$

1.3 a) omezená, b) omezená, c) neomezená, d) neomezená.

2.5 a) je rostoucí, b) nemusí být rostoucí, např. $a_n = 0$, $b_n = n$, c) nemusí být rostoucí, např. $a_n = -1$, $b_n = n$, d) nemusí být ani dobře definována, natož rostoucí.

Rejstřík

Ohlasy

„Celkem použitelný“ Student po přípravě na státnice