Aplikace rekuretních rovnic

Cvičení 1. Pomocí teorie rekurentních rovnic sečtěte vzorec.

a) $\sum_{i=1}^{n} i^2$,

b) $\sum_{k=0}^{n} 3(k-1)(k+1)$,

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)$,

d) $\sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot i$.

[Řešení: Vytvořením lin. rek. rce $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^2 \quad => \quad x_{n+1} - x_n = (n+1)^2$, dostáváme výsledek $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

rce $\sum_{k=0}^{n+1} 3(k-1)(k+1) - \sum_{k=0}^{n} 3(k-1)(k+1) = 3n(n+2)$, výsledek $x_n = n^3 + 3/2n^2 - 5/2n - 3$;

rce $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (k+1) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) = (-1)^{k+1}(k+2)$, výsledek $(-1)^n \ \frac{2n+3}{4} + \frac{1}{4}$;

rce $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i \cdot i - \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot i = 2^{n+1} \cdot (n+1)$, výsledek $2^n(2n-2) + 2$]

Cvičení 2. Odhadněte asymptotické chování funkce:

a) $f(n) = f(n/2) + n$,

b) $f(n) = 2f(n/3) + n^2$,

c) $f(n) = 10f(n/3) + n^2$,

d) $f(n) = 5f(n/5) + 3n$.

[Řešení: $f(n) = O(n); f(n) = O(n^2); f(n) = O(n^{\log_3 10}); f(n) = O(n \log_5 n)$]

Cvičení 3. Pro zpracování pole velikosti n, algoritmus zpracuje obě poloviny plus n-krát zpracuje každý prvek původního pole. Sestavte rekurentní rovnici pro počet kroků algoritmu T v závislosti na vstupu a odhadněte asymptotické chování algoritmu.

[Řešení: $T(n) = 2T(n/2) + n^2, O(n^2)$]

Cvičení 4. Dokažte: Ať $T : N \to R$ je rostoucí funkce, která pro všechna n dělitelná přirozeným číslem $b \geq 2$ splňuje rekurentní rovnici $T(n) = a \cdot T(n/b) + c$, kde $a \geq 1,\ c > 0$ jsou reálná čísla. Pak platí:

1) $T(n) \in O(n^{\log_b a)}$, pokud $a > 1$,

2) $T(n) \in O(\log n)$, pokud $a = 1$.

Cvičení 5. Dokažte: Ať $T : N \to R$ je rostoucí funkce, která pro všechna n dělitelná přirozeným číslem $b \geq 2$ splňuje rekurentní rovnici $T(n) = a \cdot T(n/b) + cn$, kde $a \geq 1,\ c > 0$ jsou reálná čísla. Pak platí:

1) $T(n) \in O(n)$, pokud $a < b$,

2) $T(n) \in O(n \log n)$, pokud $a = b$,

3) $T(n) \in O(n^{\log_b a)}$, pokud $a > b$.