Binární operace, grupoidy atp.

Cvičení 1. Určete, jaký objekt tvoří vojenské pokyny přímo hleď, vpravo bok, vlevo bok a čelem vzad s operací navázání těchto úkonů $\circ$.

Řešení

Jedná se monoid (S, $\circ$), kde S = { PH, P, L, ČZ} s operací $\circ$ definovanou tabulkou

$\circ$	**PH**	**P**	**L**	**ČZ**
PH	PH	P	L	ČZ
P	P	ČZ	PH	L
L	L	PH	ČZ	P
ČZ	ČZ	L	P	PH

ověřením vlastností zjistíme, že se jedná o komutativní grupu.

Cvičení 2. Na množině všech celých čísel **Z** je definována operace $\star$ předpisem

$$a \star b = a + b + 2ab.$$

a) Rozhodněte, zda se jedná o komutativní binární operaci.

b) Rozhodněte, zda $(\mathbf{Z}, \star)$ je pologrupa. Své tvrzení zdůvodněte.

c) Ukažte, že $(\mathbf{Z}, \star)$ má jednotkový prvek.

d) Najděte všechny invertibilní prvky v $(\mathbf{Z}, \star)$. Tvoří tyto invertibilní prvky spolu s operací $\star$ grupu? Zdůvodněte.

Řešení

a) Musíme ověřit, zda platí komutativní zákon, tj. zda pro každé dvě celá čísla a, b platí, že $a \star b = b \star a$.

Levá strana:

$a \star b = a + b + 2ab$ podle definice operace $\star$.

Pravá strana:

$b \star a = b + a + 2ba$ podle definice operace $\star$. Protože + a $\cdot$ je na množině celých čísel komutativní, můžeme v tomto výrazu provést úpravy:

$b + a + 2ba = a + b + 2ba = a + b + 2ab$. Dostali jsme tvar stejný jako pravá strana a tudíž je komutativní zákon platný.

b) $(\mathbf{Z}, \star)$ je pologrupa, splňuje-li asociativní zákon, tj. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Levá strana:

$(a \star b) = a + b + 2ab$ podle definice operace $\star$. Označme si nyní $(a \star b)$ jako A. Levou stranu asociativního zákona pak přepíšeme jako

$$A \star c = A + c + 2Ac = (a + b + 2ab) + c + 2(a + b + 2ab)c = a + b + 2ab + c + 2ac + 2bc + 4abc.$$

Pravá strana:

$(b \star c) = b + c + 2bc$. Označme $(b \star c)$ jako B. Pravou stranu asociativního zákona pak přepíšeme jako

$$a \star B = a + B + 2aB = a + (b + c + 2bc) + 2a(b + c + 2bc) =$$

$$= a + b + c + 2bc + 2ab + 2ac + 4abc =$$

$$= a + b + 2ab + c + 2ac + 2bc + 4abc$$

a je tedy roven levé straně. Asociativní zákon je tedy splněn a $(\mathbf{Z}, \star)$ je pologrupa.

c) Hledáme prvek e, pro který by platilo, že $a \star e = e \star a = a$ pro každé celé číslo a.

Z definice $\star$ plyne, že $a \star e = a + e + 2ae = a$. To je ale možné pouze tehdy, jsou-li členy e a $2ae$ vynulovány. Jediným možným kandidátem na e mezi celými čísly je tedy 0. Pokud ověříme operace $a \star 0$ a $0 \star a$, zjistíme, že jsou oba výrazy rovny a.

d) Pokusíme se vyjádřit tvar invertibilního prvku x k prvku a. Musí platit $a \star x = e = 0$ a také (z komutativní vlastnosti dokázanou v a)) $x \star a = 0$.

$$a \star x = a + x + 2ax = 0.$$

Vyřešením této rovnice dostaneme vyjádření $x = -a/(2a + 1)$, což ale není celé číslo pro žádné a různé od 0. Jediným invertibilním prvkem je tedy 0, tedy jednotka e a tvoří grupu $(e, \star, e)$.