Hornerovo schéma

Nalezněte celočíselné kořeny algebraické rovnice a rozložte levou stranu na součin.

1. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0$

Nejprve zkusíme vyšetřit celočíselné kořeny.

	1	−4	−10	28	−15	
1	1	−3	−13	15	|| 0	[1]
1	1	−2	−15	|| 0	[2]	

[1] $x_1 = 1$

[2] $x_2 = 1$

chyba v řešení

Polynom $x^2 - 2x - 15$ rozložíme na součin tak, že nejprve vypočteme kořeny této kvadratické rovnice, $x_3 = -3$, $x_4 = 5$. Rovnice má tedy dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 1$ a dva jednoduché kořeny $x_3 = 3$ a $x_4 = 5$.

Výsledek: $x_{1,2} = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 5$; $(x-1)^2(x+3)(x-5) = 0$

2. $x^7 + 4x^6 - 3x^5 - 18x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$

Celočíselnými kořeny mohou být pouze dělitelé čísla −18, tj. ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18.

	1	4	−3	−18	1	4	−3	−18	
1	1	5	2	−16	−15	−11	−14	−32	
−1	1	3	−6	−12	13	−9	6	−24	
2	1	6	9	0	1	6	9	|| 0	[1]
−3	1	3	0	0	1	3	|| 0		[2]
−3	1	0	0	0	1	|| 0			

[1] $x_1 = 2$ Dále má smysl uvažovat pouze dělitele čísla 9. Tedy zejména 2 nemůže být násobným kořenem. Navíc polynom $x^6 + 6x^5 + 9x^4 + x^2 + 6x + 9$ nemá kladné kořeny, zkoušíme tedy dále dosazovat již jen záporné dělitele čísla 9.

[2] $x_2 = -3$ Nyní dokonce stačí uvažovat již jen záporné dělitele čísla 3.

Zůstává polynom $x^4 + 1 = 0$, který nemá reálné kořeny.

Výsledek: $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -3$, $x_{4,5,6,7} \notin \mathbb{R}$, $(x-2)(x+3)^2(x^4+1) = 0)$

3. $x^5 - 8x^3 - x^2 + 12x - 4 = 0$

	1	0	−8	−1	12	−4	
1	1	1	−7	−8	4	|| 0	[1]
1	1	2	−5	−13	−9		
2	1	3	−1	−10	−16		
−2	1	−1	−5	2	|| 0		[2]
−2	1	−3	1	|| 0			[3]

[1] $x_1 = 1$

[2] $x_2 = -2$

[3] $x_3 = -2$. Dělitele jedničky jsme již vyzkoušeli, algoritmus tedy končí, zbylý polynom $x^2 - 3x + 1$ nemá celočíselné kořeny, protože však jde o kvadratický polynom, je možno provést rozklad pomocí výpočtu kořenů. Vychází $x_{4,5} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Výsledek: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -2$, $x_{4,5} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $(x-1)(x+2)^2(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0$

4. $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$

	1	1	−5	−9	−24	−36
1	1	2	−3	−12	−36	−72
−1	1	0	−5	−4	−20	−16
2	1	3	1	−7	−38	$\neq 0$
−2	1	−1	−3	−3	−18	|| 0
−2	1	−3	3	−9	|| 0	
3	1	0	3	|| 0		
−3	1	−3	12			

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Výsledek: $x_{1,2} = -2$, $x_3 = 3$, $x_{4,5} \notin \mathbb{R}$, $(x+2)^2(x-3)(x^2+3) = 0$

5. $x^6 + 3x^5 + 9x^4 + 21x^3 + 24x^2 + 12x + 2 = 0 = 0$

[$(x+1)^3(x^3+6x+2)$, polynom x^3+6x+2 má jediný reálný kořen, který leží v intervalu $(-1,0)$.]

6. $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$

	1	−2	−13	26	36	−72
1	1	−1	−14	12	48	−24
−1	1	−3	−10	36	0	−72
2	1	0	−13	0	36	|| 0
2	1	2	−9	−18	|| 0	
2	1	4	−1	−20		
−2	1	0	−9	|| 0 [1]		

[1] polynom $x^2 - 9$ již rozložíme pomocí vzorce

Výsledek: $(x-2)^2(x+2)(x+3)(x-3) = 0$

7. $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 = 0$ [$(x-3)^2(x-2)^2$]

8. $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$ [$(x+1)(x^2-4x+16)$]

9. $x^5 - 11x^4 + 47x^3 - 99x^2 + 108x - 54 = 0$ [$(x-3)^3(x^2-2x+2)$]

10. $x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x - 2 = 0$

[$(x-1)(x+2)(x^3-x+1)$, polynom x^3-x+1 má jediný reálný kořen, který leží v intervalu $(-2,-1)$.]

11. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$ [$(x-2)^2(x^3-x+1)$]

12. $x^4 + 6\,x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$ [$(x-1)(x+2)^2(x+3)$]

13. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ [$(x-2)(x+2)(x+3)(x-3)$]

14. $x^4 + 5x^3 + x^2 - 21x - 18 = 0$ [$(x-2)(x+1)(x+3)^2$]

15. $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 30x^2 + 9x + 54 = 0$ [$(x-2)(x+3)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$]

16. $x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 15x^2 + 18x - 27 = 0$ [$(x-3)(x+3)^2(x^2-x+1)$]

17. $x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4 = 0$ [$(x-1)(x+2)^2(x+1)^2$]

18. $x^5 - 11x^3 - 6x^2 + 28x + 24 = 0$ [$(x-2)(x+2)^2(x+1)(x-3)$]

19. $x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 26x^2 + 36x + 72 = 0$ [$(x-3)(x+2)^2(x-2)(x+3)$]

20. $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24 = 0$ [$(x-1)(x-2)^3(x+3)$]

21. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = 0$ [$(x-2)^2(x+1)(x-3)$]

22. $x^6 + 9x^5 + 24x^4 + 2x^3 - 63x^2 - 27x + 54 = 0$ [$(x+3)^3(x-1)^2(x+2)$]

23. $x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 4x = 0$ [$(x+1)^3x(x-1)(x-2)^2$]

24. $x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 32x^3 + x^2 - 60x + 36 = 0$ [$(x-1)^2(x+2)^2(x-3)^2$]

25. $x^5 - 10x^3 + 7x^2 + 12x - 4 = 0$ [$(x-2)^2(x+1)(x^2+3x-1)$]

26. $x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x^4 - 2x + 12 = 0$ [$(x+2)(x+3)(x^3-2x+2)$]

27. $x^6 + 3x^5 - 29x^3 - 6x^4 - 30x^2 - 12x - 8 = 0$ [$(x+2)^3(x^3-3x^2-1)$]

28. $x^6 + 5x^5 - x^4 - 21x^3 + 4x^2 + 28x - 16 = 0$ [$(x+2)^2(x-1)^3(x+4)$]

29. $x^5 - 3x^4 - 21x^3 + 11x^2 + 48x - 36 = 0$ [$(x+2)(x+3)(x-6)(x-1)^2$]

Separace kořenů

30. $x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$ [$x_1 \in (-6,-5)$, $x_2 \in (0,\frac{1}{2})$, $x_3 \in (\frac{1}{2},1)$]

31. $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$ [$x_1 \in (-1,0)$, $x_{2,3} \notin \mathbb{R}$]

32. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 5 = 0$ [$x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in (1,\frac{3}{2})$, $x_3 \in (\frac{3}{2},2)$, $x_4 \in (3,4)$]

Metoda půlení intervalů

Následující algebraické rovnice mají jediný reálný kořen. Ukažte, že tomu je skutečně tak a potom nalezněte tento kořen s přesností na …

33. $x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ [$x_1 \approx 5,11467$]

34. $x^3 + x^2 + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx 1,46557]$

35. $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,81]$

36. $x^3 - x + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,32471]$

37. $x^3 + x^2 + 2 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,69562]$

38. $x^3 + 2x - 1 = 0$ $[\, x_1 \approx 0,453397]$

39. $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ $[\, x_1 \approx 2,20556]$

40. $x^3 - x + 2 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,521]$

41. $x^3 - 2x^2 - x + 3 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,147899036]$

42. $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,8392867552]$

43. $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,4655712319]$

44. $x^3 + x - 1 = 0$ $[\, x_1 \approx 0,6823278038]$

Odseparujte kořeny algebraické rovnice a kořen ležící v intervalu … určete s přesností na …

Nalezněte alespoň jeden z kořenů algebraické rovnice s přesností na …

45. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 5 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,618033, x_2 \approx 1,38196, x_3 \approx 1,61803, x_4 \approx 3,61803]$

46. $x^5 - 2x^3 + 5x + 5 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,19]$

47. $x^3 - 3x - 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,532088886; x_2 \approx -0,3472963553; x_3 \approx 1,879385242]$

48. $x^4 - 3x^2 - 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -1,817354021; x_2 \approx 1,817354021]$

49. $x^5 - 2x^2 - x + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,8421756417; x_2 \approx 0,5115918738; x_3 \approx 1,295883014]$

50. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx -0,8019377358; x_2 \approx 0,5549581321; x_3 \approx 2,246979604]$

51. $x^4 - 3x + 1 = 0$ $[\, x_1 \approx 0,3376667656; x_2 \approx 1,307486101]$